MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

60. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 31. JULI 1954)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

60. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Knothe, H., Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse 235
Föllinger, O., Kontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung 243
Jurkat, W., und A. Peyerimhoff, Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. I 255
Hornfeck, B., Ein Satz über die Primzahlmenge 271
Gaschütz, W., Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden 274
Stoll, W., Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen 287
Hadwiger, H., und W. Nef, Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen 305
Vidav, I., Über eine Eigenschaft der Kugel 320
Vries, H. L. de, Über Riemannsche Räume, die infinitesimale konforme Transformationen gestatten 328
Meyer-König, W., und K. Zeller, Über das Taylorsche Summierungsverfahren . 348
Nitsche, J., Randwertprobleme für die Verbiegung positiv gekrümmter Flächenstücke 353

KNOTHE, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 235—242 (1954)

Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse.

Von
HERBERT KNOTHE.

Einem Kreis läßt sich eine einparametrige Schar von kongruenten Dreiecken einbeschreiben. Jedes Dreieck läßt sich durch eine Drehung in jedes andere überführen, wobei die Tangenten des Kreises in den Eckpunkten in die Eckpunkttangenten des gedrehten Dreiecks übergehen. Dieser triviale Satz führt zu folgender Kennzeichnung der Ellipse:

Einer geschlossenen konvexen Kurve mit stetiger Tangente ohne geradlinige Stücke sollen Dreiecke in folgender Weise einbeschrieben werden können:

$$P_1 = \mathfrak{x}_1(t), \quad P_2 = \mathfrak{x}_2(t) = \mathfrak{x}_1(f(t)), \quad P_3 = \mathfrak{x}_3(t) = \mathfrak{x}_1(f_1(t))$$

seien die Eckpunkte eines Dreiecks in Ortsvektorendarstellung, t der Kurvenparameter. $\mathfrak{x}_1(t)$, stetig nach t differenzierbar, durchlaufe alle Kurvenpunkte, wenn t etwa von 0 bis 2π wandert. $\mathfrak{x}_2(t)$, $\mathfrak{x}_3(t)$ mögen stetig von t abhängen. Jeder Kurvenpunkt sei die i-te Ecke $\mathfrak{x}_i(t)$ nur eines einbeschriebenen Dreiecks. Die Seite $\mathfrak{x}_2(t), \mathfrak{x}_3(t)$ sei die Seite $\mathfrak{x}_1(t'), \mathfrak{x}_2(t')$ $(t \neq t')$ eines anderen Dreiecks. Bei einer affinen Abbildung zweier beliebiger Dreiecke aufeinander sollen auch die Eckpunkttangenten ineinander übergeführt werden. Die Kurve ist eine Ellipse, wenn ein Zyklus

$$\mathfrak{x}_1(t), \ \mathfrak{x}_2(t), \ \mathfrak{x}_3(t); \quad \mathfrak{x}_1(t') = \mathfrak{x}_2(t), \ \mathfrak{x}_2(t') = \mathfrak{x}_3(t), \ \mathfrak{x}_3(t') \ldots$$

unendlich ist oder eine Periode > 4 besitzt.

Beweis. Nehmen wir ein Dreieck P_1, P_2, P_3. Den Schnittpunkt der Tangenten in P_1 und P_2 nennen wir P_1', den der Tangenten in P_2 und P_3 P_2'. Nach Voraussetzung gibt es auch ein einbeschriebenes Dreieck P_2, P_3, P_4 unserer Schar. P_3' sei der Schnittpunkt der Tangenten in P_3, P_4. P_3, P_4 wiederum sind Eckpunkte eines Dreiecks P_3, P_4, P_5 usw. Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall. Die Folge der Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sei unendlich, d.h. alle P_i seien voneinander verschieden. Nennen wir die affine Transformation die P_1, P_2, P_3 in P_2, P_3, P_4 überführt, A, so gilt nach Voraussetzung

$$A P_1 = P_2, \quad A P_1' = P_2', \quad A P_2 = P_3, \quad A P_2' = P_3', \quad A P_3 = P_4.$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt

$$A P_3' = P_4', \quad A P_4 = P_5$$

($P_i' =$ Schnittpunkt der Tangenten in P_i, P_{i+1}), was besagt, daß A auch P_2, P_3, P_4 in P_3, P_4, P_5 überführt. Allgemein wird durch A das Dreieck P_i, P_{i+1}, P_{i+2} in $P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}$ transformiert, und durch A^n das Dreieck

P_i, P_{i+1}, P_{i+2} in P_{i+n}, P_{i+n+1}, P_{i+n+2}. Da die Punkte P_i auf der Kurve mindestens einen Häufungspunkt besitzen, lassen sich hinreichend große ganzzahlige Werte n so bestimmen, daß die n-te Potenz A^n der Transformationsmatrix von A beliebig wenig von der Einheitsmatrix abweicht. Die Determinante ist daher gleich 1. Die affine Transformation A, die wir als homogen annehmen dürfen, ist äquivalent einer Drehung um einen Winkel, der ein irrationales Vielfaches von 2π ist. Da man durch Aufeinanderfolge solcher Drehungen jede Richtung beliebig nah an jede andere Richtung heranbringen kann, da weiter etwa die Seiten $\mathfrak{x}_1(t) \to \mathfrak{x}_2(t)$ sich stetig um Winkel von 0 bis 2π drehen, ohne für zwei verschiedene t Werte gleichsinnig parallel zu sein, wenn $\mathfrak{x}_1(t)$ die Kurve durchläuft, erkennen wir: Zu zwei beliebigen Dreiecken unserer Schar lassen sich immer Transformationen A^n finden, die sich beliebig wenig von der affinen Transformation unterscheiden, die die beiden Dreiecke ineinander transformiert. Aus Stetigkeitsgründen folgt daher, daß die Kurve eine eingliedrige Gruppe von affinen Transformationen in sich zuläßt. Sie ist daher eine Ellipse.

2. Fall. Die Folge der Dreiecke P_1, P_2, P_3; P_2, P_3, P_4; ... ist geschlossen (bildet einen Zyklus), d.h. nach n Schritten kommt man zum Ausgangsdreieck zurück. Es ist dann A^n gleich der identischen Abbildung. Die Determinante der Transformationsmatrix von A ist wieder 1. A ist äquivalent einer Drehung um einen Winkel, der ein rationales Vielfaches von 2π ist. Die Periode n muß für sämtliche Ausgangsdreiecke dieselbe sein. Zum Beweise nehmen wir zwei Dreiecke P_1, P_2, P_3; $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ und nennen die affine Transformation, die P_i in $\bar{P}_i$ überführt, B. A transformiere P_1, P_2, P_3 in P_2, P_3, P_4. $\bar{A}$ transformiere $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ in $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Es ist dann $BAB^{-1} = \bar{A}$, daher haben $A, \bar{A}$ dieselbe Periode.

Weiter erkennt man, daß B alle Punkte des Zyklus P_i in die Punkte $\bar{P}_i$ des anderen Zyklus transformiert. A ist äquivalent einer Drehung um den Winkel $2\pi \frac{m}{n}$ (m, n teilerfremde ganze Zahlen).

Wir setzen jetzt

$$P_1 = \mathfrak{x}_1(t), \quad P_2 = \mathfrak{x}_1(f(t)), \quad P_3 = \mathfrak{x}_1(f_1(t)), \ldots \quad P_i = \mathfrak{x}_1(f_{i-2}(t)), \ldots,$$

wobei die $f_i(t)$ monoton wachsende stetige Funktionen von t sind. Außerdem ist

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(t) = f(f(t)), \quad f_2(t) = f(f(f(t))), \ldots \\ f_i(t + 2\pi) = f_i(t) + 2\pi \\ f_i(t) > f_k(t) \quad \text{für} \quad i > k \\ f_{n-1}(t) = t + 2\pi m. \end{cases}$$

Es ist weiter

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = \sigma(t)\{a_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3)\}$$

mit konstanten a_1, b_1. Führen wir

$$\tau = 2\pi \frac{\int_0^t \sigma(x)\,dx}{\int_0^{2\pi} \sigma(x)\,dx}$$

als neue Veränderliche ein und nennen dann τ wieder t, so wird aus (2):

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = a_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3). \tag{3}$$

Die Funktionen $f_i(t)$ dürfen wir nicht ohne weiteres als nach t differenzierbar annehmen. Wir gehen deshalb zu Differenzenquotienten über und schreiben:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta \mathfrak{x}_2}{\Delta t} = \dfrac{\Delta f}{\Delta t}\{a_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) + \mathfrak{v}_2\} \\ \dfrac{\Delta \mathfrak{x}_i}{\Delta t} = \dfrac{\Delta f_{i-2}}{\Delta t}\{a_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) + \mathfrak{v}_i\} \end{cases} \tag{3'}$$

mit konstanten a_i, b_i. Hierin gilt

$$\lim_{\Delta t \to 0} \text{Länge von } \mathfrak{v}_i = 0. \tag{4}$$

Wir betrachten jetzt das von den Punkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ gebildete Dreieck. Sein doppelter Inhalt sei

$$I = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3). \tag{5}$$

Aus (3), (3'), (4), (5) folgt

$$\frac{\Delta \log I}{\Delta t} = a_1 + b_1 + \varepsilon_1 - \frac{\Delta f}{\Delta t}(b_2 + \varepsilon_2) - \frac{\Delta f_1}{\Delta t}(a_3 + \varepsilon_3). \tag{6}$$

Die ε_i sind nach (3), (3'), (4) Funktionen von t, Δt, für die

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_i = 0$$

gilt. Hieraus entnimmt man

$$I = \text{const} \cdot e^{(a_1+b_1)t - b_2 f(t) - a_3 f_1(t)} \tag{7}$$

$a_1 + b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_3 = 0$ ist nicht möglich, da in diesem Falle ein Dreierzyklus vorläge, wie aus (3), (3') hervorgeht. I muß seinen Wert behalten bei zyklischer Vertauschung der $t, f(t), f_1(t), \ldots, f_{n-2}(t)$, denn alle Dreiecke des Zyklus haben, wie oben gezeigt wurde, denselben Inhalt. Da I außerdem seinen Wert nach einmaligem Durchlaufen der Kurve, d.h. bei Zunahme von $t, f(t), f_1(t)$ um 2π, nicht ändert, folgt

$$a_1 + b_1 - b_2 - a_3 = 0 \tag{8}$$

und

$$\begin{cases} (a_1 + b_1)\,t - b_2 f(t) - a_3 f_1(t) & = \varrho(t) \\ (a_1 + b_1)\,f(t) - b_2 f_1(t) - a_3 f_2(t) & = \varrho(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (a_1 + b_1)\,f_{n-3}(t) - b_2 f_{n-2}(t) - a_3 t & = \varrho(t) + 2\pi m a_3 \\ (a_1 + b_1)\,f_{n-2}(t) - b_2 t - a_3 f(t) & = \varrho(t) + 2\pi m b_2 + 2\pi m a_3. \end{cases} \tag{9}$$

Nach (8) hat die Matrix dieses Gleichungssystems höchstens den Rang $n-1$. Wie leicht zu zeigen ist, kann der Rang bei reellen a_i, b_i höchstens auf $n-2$ herabsinken (für gerades n). In diesem Falle nimmt das Gleichungssystem (die Determinante ist eine Zirkulante) die Form an

$$(10)\qquad \begin{cases} t - f_1(t) = \varrho(t) \\ f(t) - f_2(t) = \varrho(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-3}(t) - t = \varrho(t) + 2\pi m \\ f_{n-2}(t) - f(t) = \varrho(t) + 2\pi m. \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst den ersten Fall (Rang der Matrix (9) $= n-1$). Aus (9) folgt mit konstanten $\varkappa_i$:

$$t = \varkappa_1 + \varkappa_2 \varrho(t) + \varkappa_3 \sigma(t)$$
$$f(t) = \varkappa_4 + \varkappa_5 \varrho(t) + \varkappa_6 \sigma(t)$$
$$f_1(t) = \varkappa_7 + \varkappa_8 \varrho(t) + \varkappa_9 \sigma(t)$$

und weiter:

$$(11)\qquad \alpha_1 t + \alpha_2 f(t) + \alpha_3 f_1(t) = \text{const},$$

wobei keine zwei α_i verschwinden. Diese Gleichung bleibt ebenfalls bestehen, wenn $t, f(t), f_1(t)$ durch $f(t), f_1(t), f_2(t)$ ersetzt werden. Wiederum muß

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

sein. Nehmen wir an, der Rang der Matrix

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

sei $n-1$. Es ist dann

$$t = \beta_1 + \beta_2 \lambda(t)$$
$$f(t) = \beta_3 + \beta_4 \lambda(t)$$

mit konstanten β_i; hieraus folgt

$$(13)\qquad \begin{cases} f(t) = t + \gamma \\ f_1(t) = t + 2\gamma \end{cases} \qquad (\gamma = \text{const}).$$

Ist der Rang der Matrix (12) $n-2$, so läßt sich (11) in die Form bringen:

$$(14)\qquad \begin{cases} t - f_1(t) = \varkappa \\ f(t) - f_2(t) = \varkappa \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-3}(t) - t = \varkappa + 2\pi m \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} f_1(t) = t - \varkappa \\ f_3(t) = t - 2\varkappa. \end{cases} \tag{15}$$

2. Fall. Der Rang der Matrix des Gleichungssystems (9) sei $n-2$, so daß (10) gilt. $t, f_1(t), f_3(t), \ldots$ d.h. alle $f_i(t)$ und t (i ungerade) unterscheiden sich, wie aus (10) zu ersehen ist, nur um eine additive Konstante, so daß wiederum die Gln. (15) bestehen. Nach (3), (3') haben wir somit in allen Fällen ein Differentialgleichungssystem gefunden

$$\begin{cases} \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = a_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) \\ \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt} = a_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) \\ \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt} = a_k(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_k(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3), \end{cases} \tag{16}$$

wobei man gemäß (13), (15) als $\mathfrak{x}_i(t)$, $\mathfrak{x}_k(t)$ entweder $\mathfrak{x}_2(t)$, $\mathfrak{x}_3(t)$ oder $\mathfrak{x}_3(t)$, $\mathfrak{x}_5(t)$ annehmen kann. Da alle Zyklen affinverwandt sind, können wir auch schreiben:

$$\begin{cases} \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = \alpha_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) + \beta_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_k) \\ \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt} = \alpha_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) + \beta_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_k) \\ \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt} = \alpha_3(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) + \beta_3(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) \end{cases} \tag{17}$$

mit konstanten α_i, β_i. Die Matrix der affinen Transformation, die $\mathfrak{x}_1(0)$, $\mathfrak{x}_i(0)$, $\mathfrak{x}_k(0)$ in $\mathfrak{x}_1(t)$, $\mathfrak{x}_i(t)$, $\mathfrak{x}_k(t)$ überführt, heiße $A(t) = A$. Es ist also

$$\begin{cases} A(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_i(0)) = \mathfrak{x}_1(t) - \mathfrak{x}_i(t) \\ A(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_k(0)) = \mathfrak{x}_1(t) - \mathfrak{x}_k(t). \end{cases} \tag{18}$$

Differentiation nach t liefert

$$\frac{dA}{dt}(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_i(0)) = \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} - \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_k(0)) = \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} - \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt}.$$

Nach (17) und (18) folgt

$$\frac{dA}{dt}(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_i(0)) = A\left(\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}\Big|_0 - \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt}\Big|_0\right)$$

$$\frac{dA}{dt}(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_k(0)) = A\left(\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}\Big|_0 - \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt}\Big|_0\right)$$

und hieraus

$$A^{-1}\frac{dA}{dt} = K = \text{konstante Matrix}.$$

Daher ist

$$A = e^{tK}. \tag{19}$$

Da man aus (17) weiter entnimmt, daß

$$k_1 \mathfrak{x}_1 + k_2 \mathfrak{x}_i + k_3 \mathfrak{x}_k = \mathfrak{v} \quad (k_i, \mathfrak{v}_0 \text{ konstant}) \tag{20}$$

d.h., daß unsere affinen Transformationen als homogen angenommen werden dürfen ($\mathfrak{v}_0$ Nullpunkt des Koordinatensystems), besagt (19), daß sie eine eingliedrige Gruppe bilden. Da die Kurve somit eine eingliedrige Gruppe von affinen Transformationen in sich zuläßt, ist sie eine Ellipse.

Als Anwendung wollen wir den Beweis für den folgenden bekannten Satz von W. BLASCHKE[1]) etwas einfacher gestalten und zugleich auf den R_n ausdehnen: *Die Ellipsoide sind die einzigen Lösungen der folgenden Extremalaufgabe: Ein konvexer Körper gegebenen Volumens ist so zu bestimmen, daß der größte Wert des Volumens aller einbeschriebenen Tetraeder möglichst klein wird.* Die Hauptschwierigkeit liegt darin, zu zeigen, daß das Ellipsoid der *einzige* Körper ist, der diese Extremalaufgabe löst. Wir werden im folgenden den n-dimensionalen Fall behandeln, und zwar unter denselben Regularitätsbedingungen, wie BLASCHKE sie gefordert hat. Wir bemerken zunächst mit BLASCHKE, daß ein Extremalkörper K_n folgende einfach herzuleitende Eigenschaften besitzt:

A. Jeder Randpunkt von K_n ist Eckpunkt eines größten einbeschriebenen $(n+1)$-Flachs.

B. Hat K_n eine stetige Tangentenebene, so ist die Tangentenebene an K_n in jedem Eckpunkt P eines größten $(n+1)$-Flachs parallel zur gegenüberliegenden Seitenebene. Ein solches $(n+1)$-Flach wollen wir spezielles $(n+1)$-Flach nennen.

C. Ist $P_1, \ldots, P_{n+1}$ ein K_n einbeschriebenes größtes $(n+1)$-Flach, so ist es auch $P_1', \ldots, P_{n+1}'$, wenn nur die Geraden $P_i P_i'$ alle parallel sind. Diese Eigenschaft hat BLASCHKE für den Fall des R_2 angegeben. Sie kann ohne Modifikation des Beweises auf den R_n übertragen werden.

Es sei nun P ein Eckpunkt eines größten $(n+1)$-Flachs von K_n. Die in der P gegenüberliegenden Seitenebene E_{n-1} liegenden n Eckpunkte bilden ein spezielles n-Flach in dem durch die E_{n-1} aus K_n ausgeschnittenen K_{n-1}. Dieses n-Flach besitzt ebenfalls die unter A, B, C angeführten Eigenschaften, denn es muß ein K_{n-1} einbeschriebenes größtes n-Flach sein, womit B erfüllt ist. A, C sind erfüllt, weil die in C erwähnte Parallelenrichtung $P_i P_i'$ willkürlich gewählt werden kann, speziell also auch so, daß sie in die Ebene E_{n-1} fällt. Eine Seitenebene eines größten n-Flachs des Körpers K_{n-1} schneidet aus ihm einen K_{n-2} aus, dessen einbeschriebenen größten $(n-1)$-Flache ebenfalls die Eigenschaften A, B, C besitzen. Schließlich gelang man zu einem K_2. BLASCHKE hat bewiesen, daß ein K_2 mit den Eigenschaften A, B, C und der folgenden Eigenschaft D eine Ellipse ist.

[1]) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. 2, Berlin 1923, S. 191 bis 197.

D. Bei allen größten $(n+1)$-Flachen mit gemeinsamer Ecke P liegen die P gegenüberliegenden Seitenflächen in einer E_{n-1}. Nehmen wir nämlich an, es gäbe zu einem Punkt P als Eckpunkt zwei größte $(n+1)$-Flache, so daß die P gegenüberliegenden Seitenflächen in zwei parallelen Ebenen E_{n-1}, E'_{n-1} lägen. Nach dem Vorangegangenen ließen sich dann zwei größte $(n+1)$-Flache finden mit P als Ecke, deren Seitenflächen in E_{n-1} bzw. E'_{n-1} lägen, und bei denen weiter zwei in E_{n-1} bzw. E'_{n-1} liegende E_{n-2}, E'_{n-2} parallel wären, ebenso zwei in diesen liegende $E_{n-3}, E'_{n-3}, \ldots, E_2, E'_2$. Die Ecken des ersten $(n+1)$-Flachs seien $P_1, \ldots, P_{n+1}$, die des zweiten $P'_1, \ldots, P'_{n+1}$. Bilden wir das $(n+1)$-Flach mit den Ecken $(1-\vartheta)P_i + P'_i\vartheta$, $0<\vartheta<1$ (vektorielle Addition), so ist dessen Inhalt größer als der von P_i oder P'_i [2]). Andererseits liegt es in K_n, was der Voraussetzung widerspricht, daß P_i ein größtes $(n+1)$-Flach ist. Ebenso zeigt man: Haben zwei größte $(n+1)$-Flache j Eckpunkte gemeinsam, so liegen die übrigen $n+1-j$ Eckpunkte in einer E_{n-j}.

Unter Benutzung der oben erwähnten Tatsache, daß alle K_2 Ellipsen sind, zeigen wir jetzt mit Hilfe eines Induktionsschlusses, daß K_n ein Ellipsoid sein muß. Wir setzen voraus, jeder K_{n-1} sei ein Ellipsoid. Greifen wir jetzt einen Randpunkt P von K_n heraus, so können wir durch eine affine Transformation erreichen, daß der zu P gehörige K_{n-1} (Schnitt der P gegenüberliegenden E_{n-1} mit K_n) eine Kugel wird, deren sämtliche speziellen n-Flache ja regulär sind, und daß diese mit dem zugehörigen P reguläre $(n+1)$-Flache von K_n bilden. Die ganze Konfiguration dieser $(n+1)$-Flache wird durch eine Drehung um die Achse P Mittelpunkt von K_{n-1} in sich übergeführt. Da die Tangentenebenen an K_n in den Randpunkten von K_n parallel zu den gegenüberliegenden Seitenflächen dieser regulären speziellen $(n+1)$-Flache sind, umhüllen sie einen Rotationskegel mit der Drehachse P—Mittelpunkt von K_{n-1}. Nunmehr projizieren wir diese Konfiguration orthogonal auf eine E_2. Die Projektionsrichtung möge parallel zu E_{n-1} sein. Das Bild eines speziellen $(n+1)$-Flachs mit P als Spitze, dessen eine $(n-2)$-dimensionale in E_{n-1} liegende Kante parallel zur Projektionsrichtung ist, ist ein Dreieck. Zwei Punkte dieses Dreiecks, $\bar{P}, \bar{P}'$, liegen auf dem Rande der Projektion von K_n. Ein Punkt $\bar{P}''$, das Bild der $(n-2)$-dimensionalen Kante, liegt im Inneren. $\bar{P}$ sei das Bild von P. $\bar{P}'$, ebenso $\bar{P}''$ liegt dann auf dem Bilde (Gerade) der E_{n-1}, die P gegenüberliegt. Die Verlängerung von $\bar{P}', \bar{P}''$ über $\bar{P}''$ hinaus schneide R in $\bar{P}'''$. $\bar{P}\,\bar{P}'\,\bar{P}'''$ ist ein dem Rande R einbeschriebenes Dreieck. Die Tangente T in $\bar{P}$ an R ist parallel zu $\bar{P}'\,\bar{P}'''$. Die Tangente T' in $\bar{P}'$ ist parallel zu $\bar{P}\,\bar{P}''$. Die Tangente in $\bar{P}'''$ läuft durch den Schnittpunkt von T' mit der Verbindungsgeraden $\bar{P}$ Mittelpunkt von $\bar{P}'\,\bar{P}'''$. Das Teilverhältnis $\bar{P}', \bar{P}'', \bar{P}'''$ ist konstant. Nimmt man weiter $\bar{P}'''$ als Projektion der Spitze P''' eines speziellen $(n+1)$-Flachs, so muß die

[2]) Der Beweis folgt aus dem Satz: Gilt für ein Paar von je n positiven Zahlen a_i, b_i: $\Pi a_i = \Pi b_i$, so ist: $\Pi((1-\vartheta)\,a_i + \vartheta\, b_i) \geqq \Pi a_i$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $a_i = b$ gilt $(0<\vartheta<1)$.

Projektion der P''' gegenüberliegenden E_{n-1} durch $\bar{P}$ gehen. $\bar{P}\,\bar{P}'''$ ist also auch die Seite eines weiteren dem Rande R einbeschriebenen Dreiecks, das Projektionsbild eines speziellen $(n+1)$-Flachs ist. Schließlich können diese Dreiecke außer im ebenen Fall keinen Dreierzyklus bilden. Bei einem Dreierzyklus nämlich müßten die Seiten eines Dreiecks parallel zu den Tangenten in den gegenüberliegenden Punkten sein, da die Tangente in $\bar{P}$ an R parallel zu $\bar{P}'\,\bar{P}'''$ ist. Das ist aber außer im ebenen Fall nicht möglich, da die Tangente in $\bar{P}'$ parallel zu $\bar{P}\,\bar{P}''$ ist. Ein Viererzyklus ist deshalb ausgeschlossen, weil sonst zwei Punkte des konvexen Körpers mit parallelen Tangentenebenen-Eckpunkten größter $(n+1)$-Flache wären, die eine E_{n-1} gemein hätten. Daß dieser Fall nicht vorkommen kann, macht man sich leicht klar, wenn man den zugehörigen K_{n-1} affin in eine Kugel transformiert. Alle Forderungen, die wir zu Anfang dieser Arbeit an eine Eilinie stellten, sind somit erfüllt. Jede zweidimensionale Projektion des K_n ist damit als Ellipse erkannt. Damit ist auch nach einem bekannten leicht zu beweisenden Satz von BLASCHKE jede 3- und, wie leicht zu beweisen, jede $(n-i)$-dimensionale Projektion und K_n selbst ein Ellipsoid.

P. O. Box 122 Holloman, New Mexico (U.S.A.).

(Eingegangen am 29. September 1953.)

Föllinger, O.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 243—254 (1954)

Kontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung.

Von
Otto Föllinger.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich das Variationsproblem

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = \text{Min!}$$

unter der von den üblichen Voraussetzungen abweichenden Annahme behandelt, daß das Gefälle y' der zulässigen Kurven durch die Ungleichung $g(x, y) \leq y' \leq G(x, y)$ eingeschränkt ist, wobei $g(x, y)$ und $G(x, y)$ gegebene Funktionen sind, und zwar wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für gewisse Klassen diskontinuierlicher Lösungen angegeben. In der vorliegenden Arbeit soll diese Variationsaufgabe für einen gewissen Typ kontinuierlicher Lösungen untersucht werden, nämlich für solche Lösungen C_0, die aus zwei glatt ineinander übergehenden Bögen bestehen, von denen der erste abgesehen von seinem Endpunkt weder minimales noch maximales Gefälle besitzt, während der zweite die Maximalsteigung $y' = G(x, y)$ aufweist. Für den Spezialfall $g(x, y) = a$, $G(x, y) = b$ mit gegebenen Konstanten a, b wurde dieses Problem schon von B. Flodin[2]) behandelt. Die im folgenden verwandte Methode zur Behandlung des Problems schließt sich an das in meiner früheren Arbeit benutzte Verfahren an, und daher ist auch die Bezeichnungsweise weitgehend dieselbe wie dort. Die erhaltenen Resultate werden zur Untersuchung einer differentialgeometrischen Fragestellung verwandt, nämlich der schon von Zermelo[3]) angeschnittenen Frage nach den Geodätischen mit beschränkter Steigung („Gebirgsstraßenproblem").

1. Voraussetzungen.

In dem offenen Bereich $\mathfrak{G}_2$ der x, y-Ebene seien zwei Funktionen $g(x, y)$ und $G(x, y)$ der Klasse $C^{(2)}$ gegeben mit $g(x, y) < G(x, y)$. In $\mathfrak{G}_2$ seien die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ mit $x_1 < x_2$ gelegen. Weiterhin werde ein Bereich $\mathfrak{G}_3$ des x, y, y'-Raumes definiert durch $\mathfrak{G}_3$: $(x, y) \in \mathfrak{G}_2$, $g(x, y) \leq y' \leq G(x, y)$.

Die stückweis glatte Kurve C: $y = \varphi(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, mit $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$ heiße zulässig, wenn die ihr zugeordnete Kurve $\dot{C}$: $y = \varphi(x)$,

[1]) Föllinger, O.: Diskontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung. Math. Ann. **126**, 466—480 (1953).

[2]) Flodin, B.: Über eine Art stetiger Lösungen bei Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung. Acta Soc. Sci. fenn., Comment. phys.-math. **15**, Nr. 20 (1951).

[3]) Zermelo, E.: Zur Theorie der kürzesten Linien. Jb. DMV **11**, 184—187 (1902).

$y' = \varphi'(x)$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$, in $\mathfrak{G}_3$ liegt. Der Integrand $f(x, y, y')$ des Variationsintegrals sei in dem offenen Bereich $\overline{\mathfrak{G}}_3 \supset \mathfrak{G}_3$ von der Klasse $C^{(4)}$. Die Definition des relativen, starken, eigentlichen Minimums ist dann die übliche.

Im folgenden wird ein glattes Kurvenstück C_0 betrachtet, welches aus den beiden Bögen E_0: $y = \varphi_0(x)$, $x_1 \leqq x \leqq x_0$, und $\overline{E}_0$: $y = \overline{\varphi}_0(x)$, $x_0 \leqq x \leqq x_2$, besteht, welche im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ zusammentreffen und für die gilt: $g(x, \varphi_0(x)) < \varphi_0'(x) < G(x, \varphi_0(x))$ in $x_1 \leqq x < x_0$, $p_0 = \varphi_0'(x_0) = G(x_0, y_0)$, $\overline{\varphi}_0'(x) = G(x, \overline{\varphi}_0(x))$ in $x_0 \leqq x \leqq x_2$, insbesondere also wegen $\overline{p}_0 = \overline{\varphi}_0'(x_0) = G(x_0, y_0)$ $\overline{p}_0 = p_0$. $\dot{E}_0$ liegt also mit Ausnahme des Endpunktes im Innern von $\mathfrak{G}_3$, während $\dot{\overline{E}}_0$ auf dem oberen Rand von $\mathfrak{G}_3$ gelegen ist, und beide Bögen haben den Punkt $\dot{P}_0 = (x_0, y_0, p_0)$ gemeinsam.

Da $\dot{E}_0$ bis auf seinen Endpunkt im $\mathfrak{G}_3$-Innern gelegen ist, ergibt sich durch geringe Abänderung der bekannten Schlußweisen, daß E_0, also auch C_0, nur dann ein Minimum liefert, wenn E_0 eine Extremale ist und die LEGENDRE-, JACOBI- und WEIERSTRASS-Bedingung erfüllt. Es wird daher im folgenden vorausgesetzt, daß diese Bedingungen in der verschärften Form erfüllt sind.

Setzt man $\varphi_0''(x_0) = y_0''$ und beachtet, daß $\overline{y}_0'' = \overline{\varphi}_0''(x_0) = G_x(x_0, y_0) + G_y(x_0, y_0)\, p_0$, so ist $G(x, \varphi_0(x)) - \varphi_0'(x) = (x - x_0)\,(\overline{y}_0'' - y_0'' + \eta\,(x - x_0))$, $x_1 \leqq x \leqq x_0$, mit $\lim_{x \to x_0} \eta(x - x_0) = 0$. Da $G(x, \varphi_0(x)) - \varphi_0'(x) > 0$ in $x_1 \leqq x \leqq x_0$, muß also $\overline{y}_0'' - y_0'' \leqq 0$ sein. Im folgenden werde stärker vorausgesetzt, daß $\overline{y}_0'' - y_0'' < 0$ ist, daß also E_0 und $\overline{E}_0$ in P_0 eine Berührung von genau erster Ordnung haben.

Alle bisher gemachten Voraussetzungen seien kurz durch (V) symbolisiert.

2. Die Berührungskurve.

2.1. Sei $P_0' = (x_0', \varphi_0(x_0'))$ derjenige Punkt von E_0, dessen konjugierter Punkt P_0 ist. Da die verschärfte JACOBI-Bedingung erfüllt ist, gilt $x_0' \notin [x_1, x_0]$. Durch den Punkt $Q = (\xi, \varphi_0(\xi))$, $x_0' < \xi < x_0$, geht ein Extremalenbüschel $\mathfrak{b}: y = \Phi(x, \alpha)$, $\xi \leqq x \leqq x_0 + h$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, welches E_0 für $\alpha = \alpha_0$ enthält. Mit Ausnahme von Q bildet es ein Feld um E_0, dessen Gefällefunktion $p(x, y)$ sei. Es werde der Schnitt der durch $y' = p(x, y)$ dargestellten Fläche des x, y, y'-Raumes mit dem oberen $\mathfrak{G}_3$-Rand $y' = G(x, y)$ untersucht, also die Gleichung $G(x, \Phi(x, \alpha)) - \Phi_x(x, \alpha) = 0$ nach x aufgelöst. Diese Gleichung ist erfüllt für $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$, und außerdem ist $\frac{d}{dx}\{G(x, \Phi(x, \alpha)) - \Phi_x(x, \alpha)\}|_0$ [4] $= \overline{y}_0'' - y_0'' < 0$. Daher existiert ein $\delta > 0$ derart, daß in $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$ eine stetig differenzierbare Funktion $x = \hat{x}(\alpha)$ erklärt ist mit

$$G(\hat{x}, \Phi(\hat{x}, \alpha)) - \Phi_x(\hat{x}, \alpha) = 0, \qquad |\alpha - \alpha_0| \leqq \delta, \tag{1}$$

und $\hat{x}(\alpha_0) = x_0$. Das glatte JORDAN-Kurvenstück $\hat{C}: x = \hat{x}(\alpha)$, $y = \Phi(\hat{x}(\alpha), \alpha) = \hat{y}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, durch P_0 werde als Berührungskurve des Extremalenbüschels $\mathfrak{b}$ bezeichnet.

[4] Das Zeichen $|_0$ soll andeuten, daß im vorhergehenden Ausdruck $x = x_0$ und $\alpha = \alpha_0$ zu setzen ist.

2.2. Wegen $G(\hat{x}, \Phi(\hat{x}, \alpha)) - \Phi_x(\hat{x}, \alpha) = 0$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$ und $\frac{d}{dx}(G(x, \Phi) - \Phi_x)|_0 < 0$ kann $\delta > 0$ so gewählt und ein $\varepsilon > 0$ derart bestimmt werden, daß die Funktion $d(x, \alpha) = G(x, \Phi(x, \alpha)) - \Phi_x(x, \alpha) > 0$ ist in $x_0 - \varepsilon \leqq x < \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$. Da außerdem $G(x, \varphi_0(x)) - \varphi_0'(x) > 0$ in $x_1 - h \leqq x < x_0$, dürfen δ und ε so angenommen werden, daß $d(x, \alpha) > 0$ in $\xi \leqq x \leqq x_0 - \varepsilon$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$. Infolgedessen liegt die Fläche $y' = p(x, y)$ in $\mathfrak{G}_3$ und hat mit dem $\mathfrak{G}_3$-Rand lediglich die Kurve $\hat{C}$: $x = \hat{x}(\alpha)$, $y = \hat{y}(\alpha)$, $y' = p(\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha))$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, gemeinsam.

Es soll nun das Verhalten von $\hat{C}$ in P_0 untersucht werden. Aus (1) folgt durch Differentiation nach α für den Anstieg von $\hat{C}$

$$\hat{p}(\alpha) = \frac{\dot{\hat{y}}(\alpha)}{\dot{x}(\alpha)} = \Phi_x(\hat{x}, \alpha) + \frac{G_x(\hat{x}, \hat{y}) + G_y(\hat{x}, \hat{y})\,\Phi_x(\hat{x}, \alpha) - \Phi_{xx}(\hat{x}, \alpha)}{\frac{\Phi_{x\alpha}(\hat{x}, \alpha)}{\Phi_\alpha(\hat{x}, \alpha)} - G_y(\hat{x}, \hat{y})}.$$

Insbesondere in P_0 ist also, wenn man $\hat{p}(\alpha_0) = \hat{p}_0$ setzt:

$$\hat{p}_0 - p_0 = \frac{y_0'' - \bar{y}_0''}{G_y(x_0, y_0) - \frac{\Phi_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)}{\Phi_\alpha(x_0, \alpha_0)}}.$$

Nun ist $\Phi_\alpha(x, \alpha_0)$ eine in $x = \xi$ verschwindende, nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung (J) und daher $\Phi_\alpha(x, \alpha_0) = c\,\Delta(x, \xi)$ mit $c = c(\xi) \neq 0$ und $\Delta(x, \xi) = u_2(\xi)\,u_1(x) - u_1(\xi)\,u_2(x)$, $x_1 - h \leqq x \leqq x_0 + h$, $x_0' \leqq \xi \leqq x_0$, wobei $u_1(x)$, $u_2(x)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von (J) ist. Es ist daher

$$\hat{p}_0(\xi) = p_0 + \frac{y_0'' - \bar{y}_0''}{G_y(x_0, y_0) - \frac{\Delta_x(x_0, \xi)}{\Delta(x_0, \xi)}}, \qquad x_0' < \xi < x_0.$$

Durch diese Gleichung ist die Funktion $\hat{p}_0(\xi)$ auch in x_0 und x_0' erklärt, denn wegen $\Delta(x_0, x_0) = 0 = \Delta(x_0, x_0')$, $\Delta_x(x_0, x_0)$, $\Delta_x(x_0, x_0') \neq 0$ ist $\hat{p}_0(x_0) = p_0 = \hat{p}_0(x_0')$.

Da $\Delta(x_0, \xi)\,\Delta_{x\xi}(x_0, \xi) - \Delta_x(x_0, \xi)\,\Delta_\xi(x_0, \xi) = \frac{\varkappa^2}{R(x)\,R(\xi)}$ mit $\varkappa \neq 0$ und $R(x) = f_{y'y'}(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x)) > 0$ in $x_1 - h \leqq x \leqq x_0'$, ist

$$\frac{d}{d\xi}\hat{p}_0(\xi) = \frac{\varkappa^2(y_0'' - \bar{y}_0'')}{R(x_0)\,R(\xi)\,\Delta^2(x_0, \xi)\left\{G_y(x_0, y_0) - \frac{\Delta_x(x_0, \xi)}{\Delta(x_0, \xi)}\right\}^2} > 0 \tag{2}$$

in $x_0' \leqq \xi \leqq x_0$. Bezeichnet man den Tangentenwinkel von $\hat{C}$ in P_0 mit $\hat{\Theta}_0(\xi)$, so ist $\operatorname{tg}\hat{\Theta}_0(\xi) = \hat{p}_0(\xi)$. Hierdurch ist der zunächst nur in $x_0' < \xi < x_0$ definierte Winkel $\hat{\Theta}_0(\xi)$ auch in $\xi = x_0'$ und $\xi = x_0$ erklärt. Wegen $\operatorname{tg}\hat{\Theta}_0(x_0') = p_0 = \operatorname{tg}\hat{\Theta}_0(x_0)$ ist $\hat{\Theta}_0(x_0) = \hat{\Theta}_0(x_0') + n\pi$. Da auf Grund von (2) $\hat{\Theta}_0(\xi)$ eine monoton steigende Funktion darstellt, ist $n > 0$. $\hat{p}_0(\xi) = p_0$ gilt nur für $\xi = x_0$ und $\xi = x_0'$, jedoch nicht an einer Zwischenstelle. Daher muß $n = 1$ sein, also $\hat{\Theta}_0(x_0) = \hat{\Theta}_0(x_0') + \pi$. Man hat so das Ergebnis:

Während der Träger Q des Extremalenbüschels $\mathfrak{b}$ von P_0' nach P_0 wandert, dreht sich die Berührungskurventangente in P_0 aus der durch die E_0- (und $\overline{E}_0$-) Tangente charakterisierten Grenzlage monoton um den Winkel π in dieselbe Grenzlage.

2.3. Sei nun Q so gewählt, daß $P_0' < Q < P_1$. Dann bildet das zugehörige Extremalenbüschel $\mathfrak{b}: y = \psi(x, \alpha)$, $x_1 - k \leqq x \leqq \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, ein Feld um E_0. Weiterhin sei $\overline{\mathfrak{b}}: y = \overline{\varphi}(x, \beta)$, $x_0 - h \leqq x \leqq x_2 + h$, $|\beta - \beta_0| \leqq \overline{\delta}$, die Integralkurvenschar der Differentialgleichung $y' = G(x, y)$, welche $\overline{E}_0$ für $\beta = \beta_0$ enthält. Sie werde im folgenden als allgemeines Integral von $y' = G(x, y)$ bezeichnet. Es werde der Schnitt von $\overline{\mathfrak{b}}$ mit $\hat{C}$ betrachtet: $\overline{\varphi}(\hat{x}(\alpha), \beta) = \hat{y}(\alpha)$. Da diese Gleichung für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ erfüllt und außerdem $\overline{\varphi}_\beta(x, \beta) \neq 0$ ist im ganzen Definitionsbereich des allgemeinen Integrals, existiert eine Funktion $\beta = b(\alpha)$ mit $\overline{\varphi}(\hat{x}(\alpha), b(\alpha)) = \hat{y}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, und $b(\alpha_0) = \beta_0$. Hieraus folgt $\dot{b}(\alpha_0) = \frac{\psi_\alpha(x_0, \alpha_0)}{\overline{\varphi}_\beta(x_0, \beta_0)} \neq 0$, d.h.: jede Kurve des allgemeinen Integrals mit $\beta \in |\beta - \beta_0| < \overline{\delta}$ schneidet $\hat{C}$ in genau einem Punkt, wenn nur $\overline{\delta} > 0$ genügend klein.

$\mathfrak{b}$ und $\overline{\mathfrak{b}}$ bilden ein Feld um C_0, in dem man durch $\beta = b(\alpha)$ α als gemeinsamen Scharparameter einführen kann. Dann ist $\overline{\mathfrak{b}}$: $y = \hat{\varphi}(x, b(\alpha)) = \overline{\varphi}(x, \alpha)$, $\hat{x}(\alpha) \leqq x \leqq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, wobei längs $\hat{C}$ $\overline{\varphi}_x(\hat{x}, \alpha) = \overline{\varphi}_x(\hat{x}, b) = G(\hat{x}, \hat{y}) = \psi_x(\hat{x}, \alpha)$ gilt, die Kurven des Feldes also glatt sind.

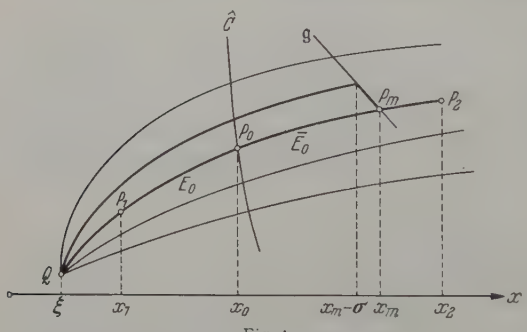

Fig. 1.

3. Herleitung einer notwendigen Bedingung.

3.1. Werde jetzt das Extremalenbüschel $\mathfrak{b}: y = \varphi(x, \alpha)$, $x_1 \leqq x \leqq x_0 + h$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, durch den Punkt P_1 betrachtet und dessen Berührungskurve $\hat{C}$. Mit seiner Hilfe soll eine spezielle Schar zulässiger Kurven konstruiert werden, welche C_0 enthält.

Dazu werde durch den Punkt $P_m = (x_m, y_m)$ mit $y_m = \overline{\varphi}_0(x_m)$, $x_0 < x_m \leqq x_2$, die Gerade $\mathfrak{g}: x = x_m - \sigma$, $y = y_m - \tilde{p}\,\sigma$ gelegt, für deren Anstieg $\tilde{p}$ $g(x_m, y_m) < \tilde{p} < G(x_m, y_m)$ gelte. Mit $\mathfrak{g}$ werde die Kurvenschar $\overline{\mathfrak{b}}: y = \overline{\varphi}(x, \beta)$ zum Schnitt gebracht, was zu der Gleichung $\overline{\varphi}(x_m - \sigma, \beta) = y_m - \tilde{p}\,\sigma$ führt. Da sie für $\sigma = 0$, $\beta = \beta_0$ erfüllt und zudem $\overline{\varphi}_\beta(x_m, \beta_0) \neq 0$ ist, gibt es eine Funktion $\beta = b(\sigma)$ mit $b(0) = \beta_0$ und $\overline{\varphi}(x_m - \sigma, b(\sigma)) = y_m - \tilde{p}\,\sigma$. Aus dieser Identität folgt $\dot{b}(0) = \frac{y_m' - \tilde{p}}{\overline{\varphi}_\beta(x_m, \beta_0)} \neq 0$, da $y_m' = \overline{\varphi}_0'(x_m) = G(x_m, y_m) > \tilde{p}$. Man kann daher σ an Stelle von β als Scharparameter in $\overline{\mathfrak{b}}$ einführen und erhält dann

$$\overline{\mathfrak{b}}: \quad y = \overline{\varphi}(x, b(\sigma)) = \overline{\overline{\varphi}}(x, \sigma), \quad x_0 - h \leqq x \leqq x_2 + h, \quad |\sigma| < \sigma_0, \quad \sigma_0 > 0.$$

Jetzt werde $\overline{\mathfrak{b}}$ mit $\hat{C}$ geschnitten:

$$\overline{\overline{\varphi}}(\hat{x}(\alpha), \sigma) = \hat{y}(\alpha) = \varphi(\hat{x}(\alpha), \alpha). \tag{3}$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $\alpha=\alpha_0$, $\sigma=0$, und es ist

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\overline{\overline{\varphi}}(\hat{x},\sigma)-\varphi(\hat{x},\alpha)\right)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \sigma=0}} = \left(\overline{\overline{\varphi}}_x(x_0,0)-\varphi_x(x_0,\alpha_0)\right)\dot{\hat{x}}(\alpha_0)-\varphi_\alpha(x_0,\alpha_0)$$
$$= -\varphi_\alpha(x_0,\alpha_0)\neq 0.$$

Man kann daher (3) nach α auflösen und mit Hilfe der so erhaltenen Funktion $\alpha=a(\sigma)$ σ an Stelle von α als Scharparameter in $\mathfrak{b}$ einführen:

$$\mathfrak{b}:\quad y=\varphi(x,a(\sigma))=\tilde{\varphi}(x,\sigma),\quad x_1-h\leqq x\leqq x_0+h,\quad |\sigma|<\sigma_0.$$

Die Berührungskurve $\hat{C}$ von $\mathfrak{b}$ stellt sich dann dar in der Form $\hat{C}: x=\hat{x}(a(\sigma))=\check{x}(\sigma)$, $y=\hat{y}(a(\sigma))=\check{y}(\sigma)$, $|\sigma|<\sigma_0$.

Jetzt werde eine Kurvenschar $\mathfrak{f}$ definiert durch

$$\mathfrak{f}:\quad \begin{aligned} &y=\tilde{\varphi}(x,\sigma), && x_1\leqq x\leqq\check{x}(\sigma)\\ &y=\overline{\overline{\varphi}}(x,\sigma), && \check{x}(\sigma)\leqq x\leqq x_m-\sigma\\ &y=y_m+\tilde{p}(x-x_m), && x_m-\sigma\leqq x\leqq x_m\\ &y=\overline{\varphi}_0(x), && x_m\leqq x\leqq x_2. \end{aligned}$$

Für $0\leqq\sigma<\sigma_0$ ist jede Kurve dieser Schar zulässig, falls nur σ_0 hinreichend klein gewählt wird.

3.2. Das zu einem Minimum zu machende Integral werde längs einer Kurve der Schar $\mathfrak{f}$ betrachtet:

$$u(\sigma)=\int_{x_1}^{\check{x}(\sigma)} f\left(x,\tilde{\varphi}(x,\sigma),\tilde{\varphi}_x(x,\sigma)\right)dx+\int_{\check{x}(\sigma)}^{x_m-\sigma} f\left(x,\overline{\overline{\varphi}}(x,\sigma),\overline{\overline{\varphi}}_x(x,b)\right)dx+$$
$$+\int_{x_m-\sigma}^{x_m} f\left(x,y_m+\tilde{p}(x-x_m),\tilde{p}\right)dx+\int_{x_m}^{x_2} f\left(x,\overline{\varphi}_0(x),\overline{\varphi}_0'(x)\right)dx,\quad 0\leqq\sigma<\sigma_0.$$

Durch die letzte Gleichung ist die Funktion $u(\sigma)$ in der ganzen Umgebung von $\sigma=0$ erklärt und stetig differenzierbar. Da C_0 ein relatives Minimum des Variationsproblems liefern soll, muß sie in $\sigma=0$ ein Minimum besitzen bezüglich aller Funktionswerte, für die $0\leqq\sigma<\sigma_0$ gilt mit hinreichend kleinem σ_0. Daher muß $u_\sigma(0)\geqq 0$ sein. Nun ist

$$u_\sigma(0)=\int_{x_1}^{x_0}\{f_y(x,\varphi_0,\varphi_0')\,\tilde{\varphi}_\sigma(x,0)+f_{y'}(x,\varphi_0,\varphi_0')\,\tilde{\varphi}_{\sigma x}(x,0)\}\,dx+$$
$$+\int_{x_0}^{x_m}\{f_y(x,\overline{\varphi}_0,\overline{\varphi}_0')\,\overline{\overline{\varphi}}_\sigma(x,0)+f_{y'}(x,\overline{\varphi}_0,\overline{\varphi}_0')\,\overline{\overline{\varphi}}_{\sigma x}(x,0)\}\,dx+$$
$$+f(x_m,y_m,\tilde{p})-f(x_m,y_m,y_m')+\check{x}_\sigma(0)\{f(x_0,y_0,p_0)-f(x_0,y_0,\overline{p}_0)\}.$$

Hierin verschwindet das letzte Glied wegen $p_0=\overline{p}_0$. Die beiden Integrale können durch partielle Integration umgeformt werden. Dabei wird aus dem ersten Integral

$$\int_{x_1}^{x_0}\tilde{\varphi}_\sigma(x,0)\left\{f_y(x,\varphi_0,\varphi_0')-\frac{d}{dx}f_{y'}(x,\varphi_0,\varphi_0')\right\}dx+f_{y'}(x,\varphi_0,\varphi_0')\,\tilde{\varphi}_\sigma(x,0)\Big|_{x_1}^{x_0}$$
$$=f_{y'}(x_0,y_0,p_0)\,\tilde{\varphi}_\sigma(x_0,0),$$

da E_0 eine Extremale ist und $\tilde{\varphi}_\sigma(x_1, 0) = 0$, da ja alle Extremalen von $\mathfrak{b}$ durch P_1 gehen und daher $\varphi_\alpha(x_1, \alpha) \equiv 0$, also auch $\tilde{\varphi}_\sigma(x_1, \sigma) \equiv 0$. Berücksichtigt man $\bar{p}_0 = p_0$, so ist

$$u_\sigma(0) = \int_{x_0}^{x_m} \bar{\bar{\varphi}}(x, 0) \left\{ f_y(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} dx +$$
$$+ f_{y'}(x_m, y_m, y_m') \bar{\bar{\varphi}}_\sigma(x_m, 0) + f_{y'}(x_0, y_0, p_0) \{\tilde{\varphi}_\sigma(x_0, 0) - \bar{\bar{\varphi}}_\sigma(x_0, 0)\} +$$
$$+ f(x_m, y_m, \tilde{p}) - f(x_m, y_m, y_m').$$

Führt man an Stelle von σ wieder die ursprünglichen Scharparameter α und β ein, so ergibt sich

$$u_\sigma(0) = \frac{y_m' - \tilde{p}}{\bar{\varphi}_\beta(x_m, \beta_0)} \int_{x_0}^{x_m} \bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0) \left\{ f_y(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} dx +$$
$$+ (y_m' - \tilde{p}) f_{y'}(x_m, y_m, y_m') + f(x_m, y_m, \tilde{p}) - f(x_m, y_m, y_m') \geqq 0.$$

Diese Ungleichung gilt zunächst nur in dem Bereich $\mathfrak{B}_2$: $x_0 < x_m \leqq x_2$, $g(x_m, \bar{\varphi}_0(x_m)) < \tilde{p} < G(x_m, \bar{\varphi}_0(x_m))$. Da jedoch die auf der linken Seite dieser Ungleichung stehende Funktion von x_m und $\tilde{p}$ in der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{B}_2$ stetig ist, gilt diese Ungleichung auch in der letzteren. Schreibt man statt x_m x, so hat man das Resultat:

Liefert C_0 unter den Voraussetzungen (V) ein Minimum, so gilt

$$\frac{\bar{\varphi}_0'(x) - \tilde{p}}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \int_{x_0}^{x} \bar{\varphi}_\beta(\xi, \beta_0) \left\{ f_y(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} d\xi +$$
$$+ (\bar{\varphi}_0'(x) - \tilde{p}) f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') + f(x, \bar{\varphi}_0, \tilde{p}) - f(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \geqq 0,$$

$g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leqq \tilde{p} \leqq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$, $x_0 \leqq x \leqq x_2$, *wobei* $y = \bar{\varphi}(x, \beta)$ *das allgemeine Integral der Differentialgleichung* $y' = G(x, y)$ *ist, welches* $\bar{E}_0$ *für* $\beta = \beta_0$ *enthält. Diese Bedingung werde mit* (N) *bezeichnet.*

4. Interpretation dieser notwendigen Bedingung.

4.1. In 2.3. wurde ein Kurvenfeld konstruiert, das C_0 enthält:

$$\mathfrak{b}: \quad y = \psi(x, \alpha), \qquad x_1 - k \leqq x \leqq \hat{x}(\alpha), \qquad |\alpha - \alpha_0| \leqq \delta : \mathfrak{A}$$

und

$$\bar{\mathfrak{b}}: \quad y = \bar{\psi}(x, \alpha), \qquad \hat{x}(\alpha) \leqq x \leqq x_2 + k, \qquad |\alpha - \alpha_0| \leqq \delta : \bar{\mathfrak{A}}.$$

$\mathfrak{b}$ bzw. $\bar{\mathfrak{b}}$ überdecke den Bereich $\mathfrak{G}$ bzw. $\bar{\mathfrak{G}}$ der x, y-Ebene, die inverse Funktion sei $a(x, y)$ bzw. $\bar{a}(x, y)$, die Gefällefunktion $p(x, y)$ bzw. $\bar{p}(x, y)$. Es ist $p(\hat{x}, \hat{y}) = \bar{p}(\hat{x}, \hat{y})$.

In der bereits zitierten Arbeit habe ich eine Funktion $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ konstruiert, welche eine Verallgemeinerung der WEIERSTRASSschen $\mathcal{E}$-Funktion auf beliebige Kurvenfelder darstellt[5]). Es soll nun $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ für das vor-

[5]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 471—474.

liegende Feld $\mathfrak{b}+\bar{\mathfrak{b}}$ bestimmt werden. Allgemein ist

$$\Gamma(x,y,\tilde{p}) = \begin{cases} \gamma(x,y,\tilde{p}) = f(x,y,\tilde{p}) - u(x,y) - v(x,y)\,\tilde{p}, & (x,y)\in\mathfrak{G} \\ \bar{\gamma}(x,y,\tilde{p}) = f(x,y,\tilde{p}) - \bar{u}(x,y) - \bar{v}(x,y)\,\tilde{p}, & (x,y)\in\bar{\mathfrak{G}}, \\ & g(x,y)\leqq\tilde{p}\leqq G(x,y) \end{cases}$$

mit

$$v(x,\psi) = \frac{1}{\psi_\alpha}\left(\omega - \int_{\hat{x}}^{x}\{f_y(\xi,\psi,\psi_x)\,\psi_\alpha + f_{y'}(\xi,\psi,\psi_x)\,\psi_{\alpha x}\}\,d\xi\right),$$

$$\bar{v}(x,\bar{\psi}) = \frac{1}{\bar{\psi}_\alpha}\left(\bar{\omega} + \int_{\hat{x}}^{x}\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\,\bar{\psi}_\alpha + f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\,\bar{\psi}_{\alpha x}\}\,d\xi\right)$$

und

$$u(x,\psi) = f(x,\psi,\psi_x) - \psi_x v(x,\psi), \qquad \bar{u}(x,\bar{\psi}) = f(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x) - \bar{\psi}_x\bar{v}(x,\bar{\psi}),$$

wobei $\omega=\omega(\alpha)$ und $\bar{\omega}=\bar{\omega}(\alpha)$ in $|\alpha-\alpha_0|\leqq\delta$ erklärte, stetig differenzierbare, sonst jedoch beliebige Funktionen sind.

4.2. Diese Ausdrücke für u, v und $\bar{u},\bar{v}$ sollen nun umgeformt werden. Zunächst werde das in u und v auftretende Integral durch partielle Integration beseitigt. Aus ihm wird hierdurch $\psi_x(\hat{x},\alpha)\,f_{y'}\big(\hat{x},\psi(\hat{x},\alpha),\psi_x(\hat{x},\alpha)\big) - \psi_\alpha(x,\alpha)\,f_{y'}\big(x,\psi(x,\alpha),\psi_x(x,\alpha)\big)$, da $\mathfrak{b}$ ja ein Extremalenfeld ist. Setzt man nun $\omega=\psi_x(\hat{x},\alpha)\,f_{y'}\big(\hat{x},\psi(\hat{x},\alpha),\psi_x(\hat{x},\alpha)\big)$, so ergibt sich

$$v = f_{y'}\big(x,\psi(x,\alpha),\psi_x(x,\alpha)\big) = f_{y'}\big(x,y,p(x,y)\big), \quad \text{also}$$

$\gamma(x,y,\tilde{p}) = \mathfrak{E}\,(x,y,p(x,y),\tilde{p})$. Jetzt werde $\bar{\omega}(\alpha)$ so bestimmt, daß längs $\hat{C}$ $v=\bar{v}$ ist, was zu $\bar{\omega}=\bar{\psi}_\alpha(\hat{x},\alpha)\,f_{y'}\big(\hat{x},\hat{y},p(\hat{x},\hat{y})\big)$ führt.

Formt man das Integral in $\bar{u}$ und $\bar{v}$ durch partielle Integration um, so erhält man

$$\int_{\hat{x}}^{x}\bar{\psi}_\alpha\left\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x) - \frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\right\}d\xi + \bar{\psi}_\alpha(x,\alpha)\,f_{y'}(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x) - \bar{\omega}(\alpha).$$

Hiermit wird

$$\bar{v} = \frac{1}{\bar{\psi}_\alpha(x,\alpha)}\int_{\hat{x}}^{x}\bar{\psi}_\alpha\left\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x) - \frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\right\}d\xi + f_{y'}(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x).$$

Daher ist

$$\bar{\gamma}(x,y,\tilde{p}) = \frac{\bar{\psi}_x(x,\alpha)-\tilde{p}}{\bar{\psi}_\alpha(x,\alpha)}\int_{\hat{x}}^{x}\bar{\psi}_\alpha\left\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x) - \frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\right\}d\xi + \mathfrak{E}\,(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x,\tilde{p})$$

mit $\alpha=a(x,y)$.

Führt man wieder den ursprünglichen Scharparameter β ein, so ist insbesondere längs $\bar{E}_0$:

$$\bar{\gamma}\,(x,\bar{\varphi}_0(x),\tilde{p}) = \frac{\bar{\varphi}_0'(x)-\tilde{p}}{\bar{\varphi}_\beta(x,\beta_0)}\int_{x_0}^{x}\bar{\varphi}_\beta(\xi,\beta_0)\left\{f_y(\xi,\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_0')\right\}d\xi + \\ + \mathfrak{E}\,(x,\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_0',\tilde{p}).$$

Durch Vergleich mit (N) folgt hieraus das Resultat:

Liefert C_0 unter den Voraussetzungen (V) ein Minimum, so ist $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) \geqq 0$ *für* $x_0 \leqq x \leqq x_2$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leqq \tilde{p} \leqq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$. *Unter (N') sei im folgenden die Aussage verstanden, daß* $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) \geqq 0$ *in* $x_0 \leqq x \leqq x_2$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leqq \tilde{p} \leqq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$ *mit* $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) = 0$ *nur für* $\tilde{p} = \bar{\varphi}_0'(x) = G(x, \bar{\varphi}_0(x))$, $x_0 \leqq x \leqq x_2$.

4.3. Aus (N) kann jetzt eine weitere notwendige Bedingung hergeleitet werden. Es ist nämlich für irgendein $x \in [x_0, x_2]$

$$\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) - \bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) = (\tilde{p} - \bar{\varphi}_0'(x)) \{\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) + \eta(\tilde{p} - \bar{\varphi}_0')\}$$

mit $\lim_{\tilde{p} \to \bar{\varphi}_0'} \eta(\tilde{p} - \bar{\varphi}_0') = 0$. Da $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) = 0$ und $\tilde{p} - \bar{\varphi}_0'(x) \leqq 0$ ist, muß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) \leqq 0$ sein, weil sonst (N) nicht erfüllt wäre.

Wenn C_0 ein Minimum liefert, muß also

$$\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) = -\frac{1}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \int_{x_0}^{x} \bar{\varphi}_\beta(\xi, \beta_0) \left\{ f_y(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} d\xi \leqq 0$$

sein in $x_0 \leqq x \leqq x_2$. *Diese Ungleichung werde mit (N_1) bezeichnet.* $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) < 0$ *in* $x_0 < x \leqq x_2$ *sei durch (N_1') symbolisiert.*

5. Hinreichende Bedingung.

Im folgenden soll bewiesen werden, *daß C_0 ein relatives, starkes, eigentliches Minimum des Variationsproblems liefert, wenn die Voraussetzungen (V) und außerdem (N') und (N_1') erfüllt sind.*

In 2.3. wurde ein Feld glatter Kurven konstruiert, das C_0 enthält. Für dieses Feld mögen die Bezeichnungen von 4.1. gelten. Außerdem werde das Gesamtfeld durch $y = \chi(x, \alpha)$, $x_1 - k \leqq x \leqq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, dargestellt. Im folgenden wird zuerst untersucht, auf welcher Punktmenge aus $\mathfrak{G}_3$ $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ verschwindet.

Zunächst ist $f_{y'y'}(x, \varphi_0(x) \varphi_0'(x)) > 0$ in $x_1 \leqq x \leqq x_0$. Man kann daher $k, \delta, \varepsilon > 0$ so bestimmen, daß $f_{y'y'}(x, \psi(x, \alpha), \pi) > 0$ in $x_1 - k \leqq x \leqq \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, $|\pi - \psi_x(x, \alpha)| < \varepsilon : \mathfrak{B}_3$. Daher ist $\mathfrak{E}(x, \psi, \psi_x, \tilde{p}) \geqq 0$ in $\mathfrak{B}_3$ und verschwindet nur für $\tilde{p} = \psi_x$. Ist weiterhin im x, α, y'-Raum $\mathfrak{A}_3$: $x_1 - k \leqq x \leqq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, $g(x, \chi(x, \alpha)) \leqq y' \leqq G(x, \chi(x, \alpha))$ und $\mathfrak{U}_3 = \mathfrak{B}_3 \cap \mathfrak{A}_3$, so ist also $\mathfrak{E}(x, \psi, \psi_x, \tilde{p}) \geqq 0$ in $\mathfrak{U}_3$ und das Gleichheitszeichen gilt nur für $\tilde{p} = \psi_x$.

Nun werde das Vorzeichen von $\bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p})$ in der Umgebung von (x_0, α_0, p_0) festgestellt. Da $\bar{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{p}}(x_0, y_0, p_0) = f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0) > 0$, kann man $\delta, \varepsilon > 0$ so wählen und ein $l > 0$ derart bestimmen, daß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p}) = f_{y'y'}(x, \psi(x, \alpha), \tilde{p}) > 0$ in $\hat{x}(\alpha) \leqq x \leqq x_0 + l$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, $G(x, \bar{\psi}(x, \alpha)) - \varepsilon \leqq \tilde{p} \leqq G(x, \bar{\psi}(x, \alpha)) : \mathfrak{Z}_3$.

Ferner ist

$$\frac{d}{dx} \bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x))|_{x=x_0} = -\{f_y(x_0, y_0, p_0) - f_{y'x}(x_0, y_0, p_0) - f_{y'y}(x_0, y_0, p_0) p_0 - f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0) \bar{y}_0''\}.$$

Da E_0 Extremale ist, gilt

$$f_y(x_0, y_0, p_0) - f_{y'x}(x_0, y_0, p_0) - f_{y'y}(x_0, y_0, p_0)\, p_0 - f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0)\, y_0'' = 0$$

und daher

$$\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x))|_{x=x_0} = -f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0)\,(y_0'' - \bar{y}_0'') < 0,$$

also auch $\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha))'_{\substack{x=x_0 \\ \alpha=\alpha_0}} < 0$. Infolgedessen können δ und l so gewählt werden, daß $\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha)) < 0$ in $\hat{x}(\alpha) \leqq x \leqq x_0 + l$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$. Da $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(\hat{x}, \bar{\psi}(\hat{x}, \alpha), \bar{\psi}_x(\hat{x}, \alpha)) = 0$, folgt aus $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha)) - \bar{\gamma}_{\tilde{p}}(\hat{x}, \bar{\psi}(\hat{x}, \alpha), \bar{\psi}_x(\hat{x}, \alpha)) = (x - \hat{x})\left[\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha))\right]_{x=\bar{x}}$ mit $\hat{x}(\alpha) < \bar{x} < x$, daß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha)) < 0$ in $\hat{x}(\alpha) < x \leqq x_0 + l$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$. Für $(x, \alpha, \tilde{p}) \in \mathfrak{Z}_3$ ist $\bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p}) - \bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha)) = (\tilde{p} - \bar{\psi}_x(x, \alpha))\,\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha)) + \frac{1}{2}(\tilde{p} - \bar{\psi}_x(x, \alpha))^2 \bar{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \pi)$ mit $\tilde{p} < \pi < \bar{\psi}_x(x, \alpha)$. Wegen $\bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \bar{\psi}_x(x, \alpha)) = 0$ ist also $\bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p}) \geqq 0$ in $\mathfrak{Z}_3$ mit $\bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p}) = 0$ nur für $\tilde{p} = \bar{\psi}_x(x, \alpha)$.

Man kann schließlich wegen $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') < 0$ in $x_0 < x \leqq x_2$ l, k, δ und ε so wählen, daß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p}) < 0$ ist für $x_0 + l \leqq x \leqq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, $G(x, \bar{\psi}(x, \alpha)) - \varepsilon \leqq \tilde{p} \leqq G(x, \bar{\psi}(x, \alpha)) : \overline{\mathfrak{U}}_3$. Hieraus folgert man wieder, daß $\bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p}) \geqq 0$ in $\overline{\mathfrak{U}}_3$ und nur verschwindet für $\tilde{p} = \bar{\psi}_x(x, \alpha)$.

Der Durchschnitt der beiden Mengen $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{U}_3 \cup \mathfrak{Z}_3 \cup \overline{\mathfrak{U}}_3$ und $\mathfrak{M}_2$: $x_1 - k \leqq x \leqq x_2 + k$, $\alpha = \alpha_0$, $g(x, \chi(x, \alpha_0)) \leqq \tilde{p} \leqq G(x, \chi(x, \alpha_0))$ werde mit $\mathfrak{D}_2$ bezeichnet. Nach Konstruktion von $\mathfrak{U}_3$, $\mathfrak{Z}_3$, $\overline{\mathfrak{U}}_3$ und auf Grund der Gültigkeit von (N') und der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung ist $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p}) > 0$ auf der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{D}_2$.

Infolgedessen ist $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p}) > 0$ in $\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{M}_3$. Man hat somit das Ergebnis: $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p}) \geqq 0$ in $\mathfrak{A}_3$ mit $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p}) = 0$ nur für $\tilde{p} = \chi_x(x, \alpha)$. Daher ist $\Gamma(x, y, p) \geqq 0$ für $(x, y) \in \mathfrak{G} + \overline{\mathfrak{G}}$, $g(x, y) \leqq \tilde{p} \leqq G(x, y)$ und verschwindet nur für $\tilde{p} = p(x, y)$, $(x, y) \in \mathfrak{G}$, $\tilde{p} = G(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\mathfrak{G}}$. Hieraus folgt, daß C_0 ein relatives, starkes Minimum liefert. Daß dasselbe auch eigentlich ist, kann man in der gleichen Weise wie bei der Behandlung der diskontinuierlichen Lösungen zeigen[6]).

6. Kürzeste mit beschränktem Gefälle.

6.1. $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, $(u, v) \in \mathfrak{G}_2$, sei ein dreimal stetig differenzierbares Flächenstück, das schlicht über der x, y-Ebene liegt und für das $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ gilt. $P_1 = (u_1, v_1)$ und $P_2 = (u_2, v_2)$ seien zwei Punkte von $\mathfrak{G}_2$ mit $u_1 < u_2$, denen die $\mathfrak{F}$-Punkte $S_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $S_2 = (x_2, y_2, z_2)$ entsprechen.

Ist C: $v = v(u)$, $u_1 \leqq u \leqq u_2$, eine stückweis glatte Kurve aus $\mathfrak{G}_2$ von P_1 nach P_2, so entspricht ihr die von S_1 nach S_2 führende $\mathfrak{F}$-Kurve $\mathfrak{C}$: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v(u))$. Die Steigung von $\mathfrak{C}$ werde durch $\operatorname{tg}\sigma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ definiert. C heißt zulässig,

[6]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 477.

wenn für die Steigung von $\mathfrak{C}$ $|\operatorname{tg}\sigma| \leqq \operatorname{tg}\sigma_0 = k$ gilt, wo $k > 0$ eine gegebene Zahl ist.

6.2. Wegen

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{z_u + z_v v'}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v) v' + (x_v^2 + y_v^2) v'^2}}$$

folgt aus $|\operatorname{tg}\sigma| \leqq k$ $g(u,v) \leqq v' \leqq G(u,v)$ mit

$$g(u,v) = -\frac{z_u z_v - k^2(x_u x_v + y_u y_v) + k\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 - k^2\Delta_z^2}}{z_v^2 - k^2(x_v^2 + y_v^2)},$$

$$G(u,v) = \frac{k^2(x_u x_v + y_u y_v) - z_u z_v + k\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 - k^2\Delta_z^2}}{z_v^2 - k^2(x_v^2 + y_v^2)},$$

sofern in $\mathfrak{G}_2$ $z_v^2 - k^2(x_v^2 + y_v^2) > 0$ und $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 - k^2\Delta_z^2 > 0$ ist.

Für die den Lösungen von $v' = g(u,v)$ und $v' = G(u,v)$ entsprechenden Flächenkurven gilt $\operatorname{tg}\sigma = \pm k$. Sie oder ihre Urbilder in der u, v-Ebene seien nach ZERMELO[7]) als Kletterkurven bezeichnet.

6.3. Das Variationsproblem $I(C) = \int_{\mathfrak{C}} ds = \text{Min!}$ ist positiv regulär, da wegen $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}_2$ regulär ist. Infolgedessen ist $\mathfrak{E}(u,v,v',\tilde{p}) \geqq 0$ und verschwindet nur für $\tilde{p} = v'$. Wenn man daher nach einer Kürzesten von S_1 nach S_2 fragt, die sich aus Kletterkurven- und Geodätischenstücken zusammensetzt, so kann es nur eine solche sein, bei der Geodätische und Kletterkurve im gemeinsamen Punkt S_0 sich berühren. Ist nämlich der zu S_0 gehörige Punkt der u, v-Ebene (u_0, v_0) und der Anstieg der Geodätischen bzw. der Kletterkurve in der u, v-Ebene p_0 bzw. $\bar{p}_0$, so müßte für $\bar{p}_0 \neq p_0$ $\mathfrak{E}(u_0, v_0, p_0, \bar{p}_0) = 0$ gelten[8]). Ebenso kann es keine Lösung des Problems geben, die lediglich aus Kletterkurvenstücken besteht, denn im gemeinsamen Punkt zweier dieser Stücke würde $\mathfrak{E}(u_0, v_0, p_0, \bar{p}_0) \leqq 0$ gelten für $\bar{p}_0 \neq p_0$[9]).

Im folgenden soll am Beispiel des Kegels gezeigt werden, daß eine aus einem Geodätischen- und einem Kletterkurvenstück bestehende glatte Flächenkurve in der Tat ein relatives Minimum der Bogenlänge liefert.

6.4. Beispiel.

Ein Kegel sei gegeben durch

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} t\cos\tau \\ t\sin\tau \\ 1 - t \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} -\infty < \tau < +\infty \\ 0 < t < +\infty. \end{matrix}$$

Gibt man ein k mit $0 < k < 1$ vor, so ist $g(\tau,t) = -at, G(\tau,t) = at$ mit $a = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$.

Infolgedessen sind die Kletterkurvenscharen $t = \beta e^{-a\tau}$ und $t = \beta e^{a\tau}$, $\beta > 0$. Im folgenden wird allein die zweite Schar $\bar{\mathfrak{b}}$ betrachtet, deren Steigung k ist.

[7]) ZERMELO: a. a. O., 186.
[8]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 469.
[9]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 480.

Der Kegel werde nun in die Ebene abgewickelt und an Stelle von τ der Polarwinkel $\varphi = \frac{\tau}{\sqrt{2}}$ als Parameter eingeführt, wobei φ auf das Intervall $[0, \infty)$ beschränkt werde. $\bar{\mathfrak{b}}$: $t = \beta e^{a\sqrt{2}\varphi}$, $0 \leqq \varphi < +\infty$, $0 < \beta < +\infty$, ist dann eine Schar logarithmischer Spiralen um 0, deren Tangenten mit dem Radiusvektor des Berührungspunktes einen Winkel ψ_0 mit $\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ einschließen und deren Scharparameter β den Radiusvektor für $\varphi = 0$ darstellt.

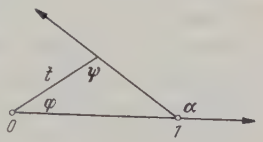

Fig. 2.

Der Integrand des Variationsintegrals ist $\sqrt{2t^2 + t'^2}$. Die Geodätischen durch den Punkt $(0, 1)$ gehen bei der Abwicklung des Kegels in die Geraden durch $(0, 1)$ über. Bezeichnet man den Winke derselben mit der Polarachse durch α, so folgt aus $t : 1 = \sin(\pi - \alpha) : \sin\psi$ und $\psi = \alpha - \varphi$ $\mathfrak{b}$: $t = \frac{1}{\cos\varphi - \operatorname{ctg}\alpha \sin\varphi} = t(\varphi, \alpha)$. Hierbei möge α auf das Intervall $(0, \pi)$ und φ auf $[0, \alpha)$ beschränkt werden. Wegen $t_\alpha = -\frac{\sin\varphi}{\sin^2(\alpha - \varphi)} < 0$ für $0 < \varphi < \alpha$, $0 < \alpha < \pi$ ist die JACOBIsche Bedingung für jede Geodätische von $\mathfrak{b}$ erfüllt, bis zu welchem Punkt man auch geht.

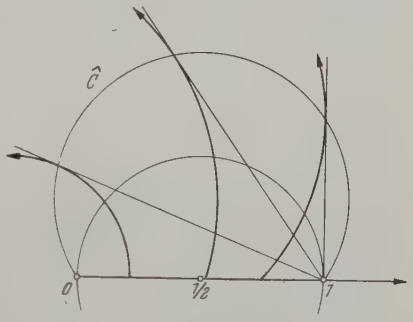

Fig. 3.

Die Berührungskurve $\hat{C}$ kann dadurch konstruiert werden, daß man von $(0, 1)$ aus die Tangenten an die logarithmischen Spiralen von $\bar{\mathfrak{b}}$ legt. Für einen Punkt von $\hat{C}$ gilt dann $t : 1 = \sin(\pi - \alpha) : \sin\psi_0$, also $\hat{t}(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\sin\psi_0}$. Damit erhält man $\hat{\varphi}(\alpha) = \alpha - \psi_0$. $\hat{C}$ stellt daher den oberhalb der Polarachse gelegenen Bogen des Kreises mit dem Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi_0)$ und dem Radius $\frac{1}{2\sin\psi_0}$ dar. Dieser Kreis geht durch 0 und $(1, 0)$ und hat in letzterem Punkt die Steigung $\operatorname{tg}\psi_0$, wird also von der durch $(1, 0)$ gehenden Spirale mit $\beta = 1$ tangiert.

Fällt man von 0 aus die Lote auf die Geraden von $\bar{\mathfrak{b}}$, so stellt die Fußpunktkurve derselben einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und dem Radius $\frac{1}{2}$ dar. Auf dem Kegel entspricht ihm der geometrische Ort der Punkte des Geodätischenbüschels durch $(0, 1)$, in denen die Geodätischen der Kegelspitze am nächsten kommen. Aus der Lage dieses Kreises zu $\hat{C}$ erkennt man, daß der Berührungspunkt von Geodätischer und Kletterkurve für $\psi_0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ vor der ersten Unendlichkeitsstelle der Geodätischen und damit erst recht vor deren höchstem Punkt gelegen ist, für $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ jedoch hinter ihrer größten Annäherung an die Spitze des Kegels, jedoch vor ihrer Unendlichkeitsstelle liegt.

Man kann in $\bar{\mathfrak{b}}$ α an Stelle von β als Scharparameter einführen, wenn man $0<\beta<1$ voraussetzt. Es ist dann

$$\bar{\mathfrak{b}}: \quad t=\frac{e^{a\sqrt{2}\psi_0}}{\sin\psi_0}\sin\alpha\, e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha)}=\bar{t}(\varphi,\alpha), \qquad 0\leqq\varphi<+\infty, \qquad \psi_0\leqq\alpha<\pi.$$

Längs $\hat{C}$ ist daher $\bar{t}_{\varphi\varphi}-t_{\varphi\varphi}=-\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\psi_0}<0$ wegen $0<\psi_0<\dfrac{\pi}{2}$ und $\psi_0<\alpha<\pi$. Somit sind alle Voraussetzungen (V) erfüllt.

Da bei den vorliegenden Problemen die $\mathfrak{E}$-Funktion $\geqq 0$ ist und nur in ordentlicher Weise verschwindet, kann man sich bei der Untersuchung des Vorzeichens von $\bar{\gamma}(\varphi, t, \tilde{p})$ auf die Betrachtung des ersten Bestandteils dieser Funktion beschränken. Dieser berechnet sich zu

$$\frac{a\sqrt{2}t-\tilde{p}}{a\sqrt{1+a^2}\,e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}}\{e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}-1\}.$$

Da $G(\varphi,t)=a\sqrt{2}t$, ist stets $a\sqrt{2}t-\tilde{p}\geqq 0$. Der Klammerausdruck ist $\geqq 0$, sofern $\varphi\geqq\alpha-\psi_0$. Das heißt aber: $\bar{\gamma}(\varphi,t,\tilde{p})\geqq 0$ für jede Kletterkurve von ihrem Schnittpunkt mit $\hat{C}$ ab. Daß diese Funktion nur für $\tilde{p}=\bar{t}_\varphi$ verschwindet, folgt daraus, daß die $\mathfrak{E}$-Funktion nur in ordentlicher Weise verschwinden kann. Somit ist (N') für jede Kletterkurve erfüllt. Ebenso auch (N_1'). Denn es ist

$$\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(\varphi,\bar{t},\bar{t}_\varphi)=-\frac{1}{a\sqrt{1+a^2}\,e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}}\{e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}-1\}<0$$

für $\varphi>\alpha-\psi_0$, $=0$ für $\varphi=\alpha-\psi_0$.

Sei nun $P_1=(0,1)$ und $P_2=(t_2,\varphi_2+2\varkappa\pi)$ mit $0<t_2<+\infty$, $0\leqq\varphi_2<2\pi$, $\varkappa=0,1,2,\ldots$. Dann gibt es eine logarithmische Spirale $t=\beta\, e^{a\sqrt{2}\varphi}$, $0\leqq\varphi<+\infty$, mit $0<\beta<1$, welche 0 mindestens einmal umkreist und dann durch P_2 hindurchgeht. Man nehme nur $\beta=t_2\, e^{-a\sqrt{2}(\varphi_2+(n+1)2\pi)}$, $n=0,1,2,\ldots$, so daß die Gleichung der Spirale durch $t=t_2\, e^{-a\sqrt{2}(\varphi_2+(n+1)2\pi-\varphi)}$, $0\leqq\varphi<+\infty$, gegeben ist. Für sie ist $\beta<1$, wenn nur n hinreichend groß gewählt wird. Außerdem ist für $\varphi=2\pi$ $t=t_2\, e^{-a\sqrt{2}(\varphi_2+n\cdot 2\pi)}$. Diese Zahl ist $<t_2$ bei geeigneter Wahl von n, so daß die Spirale bei ihrem ersten Umlauf um 0 nicht durch P_2 geht. Erst für $\varphi=\varphi_2+(n+1)2\pi$ ist $t=t_2$. Sei B der erste Schnittpunkt dieser Spirale mit $\hat{C}$, und werde die Geodätische von P_1 nach B gezogen. Dann liefert die Kurve C, bestehend aus diesem Geodätischenstück P_1B und dem anschließenden Kletterkurvenstück BP_2 ein starkes, eigentliches, relatives Minimum des vorliegenden Variationsproblems.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 21. Januar 1954.)

Jurkat, W., und A. Peyerimhoff
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 255—270 (1954)

Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. I*).

Von
Wolfgang Jurkat und Alexander Peyerimhoff.

Diese Arbeit führt unsere kürzlich erschienenen Untersuchungen [1953] über Lokalisation bei absoluter Konvergenz von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen fort. Analog zu dem bekannten Satz von P. Fatou für gewöhnliche Konvergenz konnten wir zeigen, daß aus der absoluten Konvergenz der Folge $\{a_n\}$ $\left(\text{d.h. aus } \sum_1^\infty |a_n - a_{n-1}| < \infty\right)$ und der Regularität von $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ für $z = 1$ die absolute Konvergenz dieser Potenzreihe für $z = 1$ folgt. Weiter ergab sich aus diesem speziellen Lokalisationssatz sogar ein Analogon zu dem allgemeinen Riemannschen Lokalisationssatz für trigonometrische Reihen, nach welchem bei allen trigonometrischen Reihen mit absolut konvergenten Koeffizienten die absolute Konvergenz eine lokale Eigenschaft des zweifachen Integrals dieser Reihen ist. Dieses zweite Resultat enthält natürlich das erste, und dies ist auch die ursprüngliche Begründung von P. Fatou für seinen Satz im Falle der gewöhnlichen Konvergenz.

Wir werden in dieser Arbeit an Stelle der absoluten Konvergenz allgemeiner absolute Cesàro-Summierbarkeit betrachten. Dabei zeigt es sich, daß gerade der Weg vom speziellen zum allgemeinen Lokalisationssatz besonders einfach und zugleich verallgemeinerungsfähig ist. Analog zu dem Satz von M. Riesz [1911] für gewöhnliche Summierbarkeit ergibt sich die absolute C_α-Summierbarkeit $(\alpha > -1)$ der Reihe $\sum a_n$ aus der absoluten Konvergenz der Folge $\left\{\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right\}$ und der Regularität von $f(z)$ für $z = 1$. Es ist interessant, daß sich dieses Ergebnis im wesentlichen schon aus dem oben erwähnten Spezialfall $\alpha = 0$ ableiten läßt (§ 1). Von dem Lokalisationssatz für Potenzreihen kommt man dann wie im Falle der absoluten Konvergenz zu einem allgemeinen Lokalisationssatz für trigonometrische Reihen, nach welchem die absolute C_α-Summierbarkeit der trigonometrischen Reihen, deren Koeffizienten nach Division durch $(n+1)^\alpha$ absolut konvergieren, eine lokale Eigenschaft einer durch mehrfache Integration dieser Reihen entstandenen Funktion ist (§ 2). Dies entspricht vollkommen einem von Zygmund [1926] angegebenen Lokalisationssatz für gewöhnliche Summierbarkeit. Um die Analogie zwischen absoluter und gewöhnlicher bzw. gleichmäßiger Summierbarkeit besonders

*) This research was supported in part (as far as the work of W. Jurkat is concerned) by the United States Air Force, through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

deutlich zu machen, sind die Beweise der Arbeit so aufgebaut, daß sie bei jedem dieser Konvergenzbegriffe gültig bleiben. Dies war fast ohne Mehraufwand möglich und hat uns oft bei der Aufstellung der Sätze geleitet.

Für unsere Methode des schrittweisen Aufsteigens zu immer allgemeineren Sätzen ist es gleichgültig, welche Methode man zum Beweis des ersten dieser Sätze, d.h. des „absoluten FATOU-RIESZschen Satzes" heranzieht. Hierfür ist jede Methode geeignet, der weitere Weg liegt dann weitgehend fest. Vom RIEMANNschen Lokalisationssatz bei absoluter Summierbarkeit führt dieser Weg z.B. zu einem Analogon der RIEMANNschen Formeln (§ 3). Weiter ist es möglich, die Lokalisationsverhältnisse bei absoluter Summierbarkeit von FOURIER-Reihen zu klären. Absolute Summierbarkeit ist bekanntlich nicht bei allen erzeugenden Funktionen eine lokale Eigenschaft, aber für gewisse Klassen lassen sich die hierfür notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben. Schließlich lassen sich sehr allgemeine lokale Bedingungen für die absolute CESÀRO-Summierbarkeit von trigonometrischen Reihen und Potenzreihen angeben, die insbesondere wieder den absoluten FATOU-RIESZschen Satz enthalten. Die zuletzt genannten Punkte werden wir in Teil II dieser Arbeit besprechen.

§ 1. Der Satz von Fatou-Riesz bei $|C_\alpha|$-Summierbarkeit.

1.1. Als p-te Differenz einer (komplexen) Zahlenfolge $\{a_n\}$ definieren wir

$$\overline{\Delta}^p a_n = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} (-1)^\nu a_{n-\nu},$$

wobei $a_n = 0$ für $n < 0$ gesetzt sei. Eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt $|C_\alpha|$-summierbar bzw. C_α-summierbar ($\alpha > -1$), falls die durch $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu$ für $n \geqq 1$ mit $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$ erklärte Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n$ absolut bzw. im gewöhnlichen Sinne konvergiert. Die Summe $\sum_0^\infty \alpha_n$ heißt dann die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty a_n$. Analog zu den Symbolen O und o schreiben wir

$$x_n = a(y_n),$$

wenn von einer Stelle an $x_n = a_n y_n$ ist, wobei die Folge $\{a_n\}$ absolut konvergiert, d.h. $\sum_1^\infty |a_n - a_{n-1}| < \infty$ oder $\sum_0^\infty |a_n - a_{n+1}| < \infty$ ist.

Es gilt dann der

Satz 1. *Erfüllen die Koeffizienten einer Potenzreihe $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ für eine ganze Zahl $p \geqq 0$ und beliebiges $\alpha > -1$ die Bedingung*

(1) $$\overline{\Delta}^p \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} = a(1)$$

oder auch

(2) $$\overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha)$$

und ist $f(z)$ regulär für $z=1$ [wegen (1) bzw. (2) besitzt $\sum a_n z^n$ einen Konvergenzradius ≥ 1], so ist $\sum a_n z^n$ für $z=1$ $|C_\alpha|$-summierbar.

Zusatz 1. Betrachtet man an Stelle der absoluten Summierbarkeit die gewöhnliche C_α-Summierbarkeit, so bleibt Satz 1 wörtlich richtig, wenn man bei den Bedingungen (1) und (2) entsprechend das Symbol a durch o ersetzt. Ferner ist die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty a_n$ gleich dem Wert der Funktion $f(z)$ an der Stelle $z=1$.

Zusatz 2. Gilt (1) bzw. (2) mit o statt a und ist $f(z)$ regulär für alle Punkte eines Bogens $z=e^{i\varphi}$ mit $|\varphi|\leq\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\pi)$, so ist $\sum a_n z^n$ für alle diese Punkte sogar gleichmäßig C_α-summierbar zum Wert der Funktion $f(z)$.

Der Satz 1 stellt die Verallgemeinerung unseres früheren Ergebnisses[1]) bei absoluter Konvergenz $(\alpha=0)$ auf beliebige $|C_\alpha|$-Summierbarkeit $(\alpha>-1)$ dar. Die beiden Zusätze sind (abgesehen von der Einführung der Differenzen $\overline{\Delta}^p$) bekannt[2]) und beweisen deutlich die Analogie zwischen absoluter und gewöhnlicher Summierbarkeit. Es wird sich zeigen, daß auch die Beweise von Satz 1 und Zusatz 1 völlig einheitlich geführt werden können, indem sie auf den durchweg bekannten Spezialfall $\alpha=0$, $p=0$ zurückgeführt werden.

1.2. Dem Beweis von Satz 1 schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Ist $\overline{\Delta} a_n = a(n^\alpha)$ bzw. $=o(n^\alpha)$ für ein $\alpha>-1$, so ist $a_n=a(n^{\alpha+1})$ bzw. $=o(n^{\alpha+1})$.*

Beweis. Der o-Fall ist trivial. Im a-Fall dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß $a_0=a_1=a_2=0$ ist. Mit $\overline{\Delta}\frac{\overline{\Delta} a_n}{n^\alpha}=\beta_n$ $(n\geq 2)$ ist dann $a_n=\sum_{\nu=2}^{n}\nu^\alpha\sum_{\mu=2}^{\nu}\beta_\mu$ für $n\geq 2$ und somit für $n\geq 3$

$$\overline{\Delta}\frac{a_n}{n^{\alpha+1}}=\frac{\beta_n}{n}+\sum_{\mu=2}^{n-1}\beta_\mu\left[\frac{1}{n}+\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\nu^\alpha\overline{\Delta}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right].$$

Wegen $\sum|\beta_\mu|<\infty$ und $\overline{\Delta}\frac{1}{n^{\alpha+1}}=-\frac{\alpha+1}{n^{\alpha+2}}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha+3}}\right)$, $\sum_{\nu=2}^{n-1}\nu^\alpha=\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}+O(n^\alpha)+O(1)$ ergibt sich nach kurzer Rechnung die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Ist $\overline{\Delta}^p a_n=a(n^\alpha)$ bzw. $=o(n^\alpha)$ für ein $\alpha>-1$, so gilt für beliebiges (reelles) β $\overline{\Delta}^p(n+1)^\beta a_n=a(n^{\alpha+\beta})$ bzw. $=o(n^{\alpha+\beta})$; insbesondere sind also die Bedingungen (1) und (2) gleichbedeutend.*

Beweis. Die Behauptung ist richtig, wenn für jede ganze Zahl k und für $q=0,1,\ldots,p$ gilt[3])

$$(3)\qquad \overline{\Delta}^q(n+k)^\beta\overline{\Delta}^{p-q}a_n=a(n^{\alpha+\beta})\quad\text{bzw.}\quad=o(n^{\alpha+\beta})\quad\text{für } n\to\infty.$$

[1]) Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], Satz 1.

[2]) Vgl. RIESZ [1911]; ZYGMUND [1926], Satz IV, S. 91; JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], Fußnote [4]).

[3]) Es ist $\overline{\Delta}^p x_n y_n=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\overline{\Delta}^q x_{n-p+q}\overline{\Delta}^{p-q}y_n$.

Durch mehrmalige Anwendung von Hilfssatz 1 folgt aus $\overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha)$ bzw. $= o(n^\alpha)$ unmittelbar $\overline{\Delta}^{p-q} a_n = a(n^{\alpha+q})$ bzw. $= o(n^{\alpha+q})$ und wegen

$$\overline{\Delta}^q (n+k)^\beta = \gamma_1 n^{\beta-q} + \gamma_2 n^{\beta-q-1} + O(n^{\beta-q-2})$$

ist (3) erfüllt[4]).

Hilfssatz 3. *Ist* $f(z) = \sum a_n z^n$ *konvergent für* $|z| < 1$ *und* $f(z)$ *regulär für* $z = 1$, *so gilt dasselbe für*

$$f_\alpha(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} z^n \qquad \textit{bei beliebigem (reellem)}\ \alpha.$$

Dieser Satz ist bekannt[5]). Er folgt z. B. aus dem HADAMARDschen Multiplikationssatz und der Tatsache, daß $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ höchstens bei $z = 1$ eine Singularität besitzt. Einen direkten Beweis für Hilfssatz 3 kann man unter Verwendung der Darstellung

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} t^n \, dt$$

führen.

Hilfssatz 4. *Ist für ein* $-1 < \alpha \leqq 0$ $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^\alpha}$ *absolut bzw. im gewöhnlichen Sinn konvergent, so ist die Reihe* $\sum_1^\infty a_n$ $|C_\alpha|$- *bzw.* C_α-*summierbar.*

Beweis. Im absoluten Fall benutzt man, daß die C_α-Transformation $\sum_1^\infty \alpha_n$ von $\sum_1^\infty a_n$ durch

$$\alpha_n = \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu^{\alpha+1} \beta_\nu \qquad \text{mit} \qquad \beta_n = \frac{a_n}{n^\alpha}$$

gegeben ist, woraus wegen $\sum |\beta_n| < \infty$ unmittelbar $\sum |\alpha_n| < \infty$ folgt, denn es konvergiert sogar noch die Reihe mit den Gliedern

$$\frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n |A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu^{\alpha+1} \beta_\nu| .$$

Im Fall der gewöhnlichen Summierbarkeit benutzen wir für $-1 < \alpha < 0$ die Identität

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} \sum_{\mu=1}^\nu \frac{a_\mu}{A_\mu^\alpha} A_\mu^\alpha = s_n + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} (A_{n-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^\alpha - A_{n-\nu-1}^\alpha A_{\nu+1}^{\alpha-1}) s_\nu ,$$

[4]) Aus $x_n = a(n^\gamma)$ folgt $x_n = a(n^{\gamma+1})$ und aus $x_n = O(n^\gamma)$ folgt $x_n = a(n^{\gamma+2})$.

[5]) Vgl. z. B. BIEBERBACH [1920], S. 489.

wobei $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{A_\nu^\alpha}$ konvergent ist und die von s_n nach $\sum_1^n \alpha_\nu$ führende Transformation konvergenzerhaltend ist. Von den drei dafür hinreichenden Bedingungen ist die Zeilensummen- und Spaltenbedingung trivialerweise erfüllt, während die Zeilennormbedingung sich aus folgender Rechnung ergibt:

$$\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} \left| A_{n-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^\alpha - A_{n-\nu-1}^\alpha A_{\nu+1}^{\alpha-1} \right| = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} A_{n-\nu-1}^\alpha A_\nu^\alpha \left| \frac{\alpha}{n-\nu} - \frac{\alpha}{\nu+1} \right|$$

$$\leqq \frac{K}{n^{\alpha-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)^{\alpha-1} (\nu+1)^{\alpha-1} \leqq K'.$$

Hängt a_n von einem Parameter ab und gilt die Voraussetzung gleichmäßig in bezug auf diesen Parameter, so auch die Behauptung wie derselbe Beweis zeigt.

Hilfssatz 5. *Ist für ein* $\alpha > -1$ $\sum_1^\infty \frac{a_n}{(n+1)^\alpha}$ *absolut bzw. im gewöhnlichen Sinne konvergent, so folgt für die Reihenglieder* $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu$ $(n \geqq 1)$ *der* C_1*-Transformation von* $\sum a_n$ *die Beziehung* $\alpha_n = a(n^{\alpha-1})$ *bzw.* $= o(n^{\alpha-1})$.

Beweis. Es gilt für $n \geqq 2$

$$\Delta \frac{\alpha_n}{n^{\alpha-1}} = O(1) \frac{n a_n}{n^{\alpha+1}} + \frac{O(1)}{n^{\alpha+2}} \sum_1^{n-1} \nu a_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II},$$

und auf Grund der Voraussetzungen im absoluten Fall folgt dann

$$\sum |\mathrm{I}| < \infty, \qquad \sum |\mathrm{II}| \leqq K \sum_1^\infty |\nu a_\nu| \sum_{n=\nu+1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha+2}} < \infty.$$

Im o-Fall folgt die Behauptung aus der für $n \geqq 1$ gültigen Beziehung

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_1^n \nu a_\nu = s_n - \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_1^{n-1} [(\nu+1)^{\alpha+1} - \nu^{\alpha+1}] s_\nu \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_1^n \frac{a_\nu}{\nu^\alpha}$$

nach dem Satz von TOEPLITZ.

1.3. Beweis von Satz 1. Auf Grund von Hilfssatz 2 dürfen wir als Koeffizientenbedingung stets die Bedingung (1) nehmen. Nach Hilfssatz 3 ist $f_\alpha(z)$ und folglich auch

$$(1-z)^p f_\alpha(z) = \sum_0^\infty \Delta^p \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} z^n$$

regulär für $z=1$. Diese Funktion erfüllt aber nun die Koeffizientenbedingung von Satz 1 ($\alpha=p=0$), so daß $\sum\left|\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right|<\infty$ ist oder $\Delta^{p-1}\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}=a(1)$, falls $p\geqq 1$. Im letzteren Fall wiederholt man denselben Schluß mit der Funktion $(1-z)^{p-1}f_\alpha(z)$ usw. und erhält somit in allen Fällen

$$\sum\left|\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right|<\infty. \tag{4}$$

Bei den Zusätzen ergibt sich ebenso, daß

$$\sum\frac{a_n}{(n+1)^\alpha} \quad \text{konvergiert,} \tag{5}$$

bzw. daß für $|\varphi|\leqq\varepsilon$

$$\sum\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}e^{in\varphi} \quad \text{gleichmäßig konvergiert.} \tag{5'}$$

Ist $-1<\alpha\leqq 0$, so folgt hieraus nach Hilfssatz 4 bereits die Behauptung. Die Übereinstimmung von C_α-Summe und Funktionswert ergibt sich aus der Verträglichkeit von CESÀRO- und ABEL-Summierbarkeit. Die allgemeine Gültigkeit von Satz 1 beweisen wir durch Induktion, indem wir aus der Richtigkeit des Satzes für $\alpha\leqq k-1$ (k eine natürliche Zahl, p beliebig) das gleiche für $k-1<\alpha\leqq k$ erschließen:

Wie bei Hilfssatz 5 sei $\sum\alpha_n$ die C_1-Transformation von $\sum a_n$. Durch Abänderung von a_1 (hierdurch bleibt Voraussetzung und Behauptung ungeändert) können wir erreichen, daß $f'(1)=0$ ist, so daß

$$\frac{z\,f'(z)}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,a_\nu\right)z^n$$

für $z=1$ regulär ist. Nach Hilfssatz 3 ist dann auch $\sum\alpha_n z^n$ regulär für $z=1$. Andererseits folgt aus (4) und Hilfssatz 5 die Beziehung $\alpha_n=a(n^{\alpha-1})$. Beides zusammen ergibt auf Grund der Induktionsannahme die $|C_{\alpha-1}|$-Summierbarkeit von $\sum\alpha_n$, und dies bedeutet wegen der Äquivalenz[6]) $|C_{\alpha-1}C_1|\approx|C_\alpha|$ gerade die zu beweisende $|C_\alpha|$-Summierbarkeit von $\sum a_n$. Im Fall von Zusatz 1 schließt man entsprechend. Im Fall von Zusatz 2 ist wegen (5') $a_n=o(n^\alpha)$ und es bleibt nur $\alpha>0$ zu betrachten, so daß die Behauptung nach RIESZ [1911] folgt.

1.4. Aus dem oben dargestellten Beweis ist zu ersehen, daß die Regularitätsvoraussetzung gar nicht vollständig gebraucht wird. Sie läßt sich z.B. durch entsprechende Differenzierbarkeitsvoraussetzungen längs des Randes ersetzen, denn das ist zulässig im Fall $\alpha=0$[7]) und bei Hilfssatz 3 ebenfalls. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen, da sich aus unseren folgenden Überlegungen ohnedies weitgehende Verschärfungen ergeben werden.

Der im Beweis verwendete Äquivalenzsatz $|C_{\alpha-1}C_1|\approx|C_\alpha|$ für $\alpha>0$ läßt sich bei etwas größerem Rechenaufwand vermeiden. Zunächst kann man

[6]) Vgl. KNOPP-LORENTZ [1950], Satz 5..

[7]) Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], S. 288 und § 5.

nämlich (ähnlich wie bei Hilfssatz 3) die Regularität von $\sum \alpha_n z^n$ für $z=1$, oder jedenfalls ausreichende Differenzierbarkeit längs des Randes nachweisen, wobei $\sum \alpha_n$ die C_α-Transformation von $\sum a_n$ sei. Aus $\sum \left|\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right| < \infty$ kann man ferner (analog zu Hilfssatz 5) folgern, daß $\overline{\Delta}^k \alpha_n = a(1)$ $(k < \alpha \leqq k+1$, $k \geqq 0$ ganz) ist, und durch Anwendung von Satz 1 $(\alpha = 0,\ p \geqq 0)$ folgt schließlich die Behauptung.

In Satz 1 ist der folgende Satz von Chow [1947], [1953] enthalten:

Ist $a_n = O(n^\beta)$ *oder allgemeiner* $\sum \frac{|a_n|}{n^\alpha} < \infty$ *mit* $\alpha > \beta + 1 \geqq 0$ *und* $f(z) = \sum a_n z^n$ *regulär für* $z=1$, *so ist* $\sum a_n$ $|C_\alpha|$*-summierbar.*

Dies ist unmittelbar klar, da unter diesen Voraussetzungen auch $a_n = a(n^\alpha)$ ist. Tatsächlich gilt dieser Satz sogar für $\alpha > -1$ bzw. $\beta \geqq -2$.

In Satz 1 haben wir die Summierbarkeit von $\sum a_n z^n$ im Punkte $z=1$ betrachtet. Will man statt dessen einen beliebigen anderen Punkt $z = e^{i\varphi} \neq 1$ in Betracht ziehen, so sind nur die Koeffizienten a_n im bisherigen Satz durch $a_n e^{in\varphi}$ zu ersetzen. Im o-Fall mit $p=0$ macht dies keinen Unterschied, in allen anderen Fällen sind aber die Bedingungen voneinander zu unterscheiden. Die Koeffizientenbedingungen sind dann von „lokalem" Charakter[8]). Wenn dagegen alle Voraussetzungen von Satz 1 für den Punkt $z=1$ erfüllt sind, so sind die Koeffizientenbedingungen sogar für alle Punkte $z = e^{i\varphi}$ erfüllt, wie sofort aus (4) und (5) hervorgeht. Dann ist also die Reihe $\sum a_n z^n$ in jedem Regularitätspunkt von $z=1$ absolut summierbar bzw. auf jedem (abgeschlossenen) Regularitätsbogen gleichmäßig summierbar. Das letzte gilt übrigens auch im absoluten Fall, da nach (4) aus den a-Voraussetzungen für a_n zusammen mit der Regularität die o-Voraussetzungen folgen.

Schließlich bemerken wir, daß die Bedingungen (1) und (2) von Satz 1 ersetzt werden können durch

$$(1') \qquad \Delta^p \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} = a(1) \quad \text{bzw.} \quad = o(1)$$

$$(2') \qquad \Delta^p a_n = a(n^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad = o(n^\alpha),$$

wobei

$$\Delta^p a_n = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} (-1)^\nu a_{n+\nu} = (-1)^p \overline{\Delta}^p a_{n+p}$$

ist[9]). Eine derartige Abänderung der Koeffizientenbedingungen ist auch bei allen folgenden Sätzen dieser Arbeit zulässig.

§ 2. Der Riemannsche Lokalisationssatz bei $|C_\alpha|$-Summierbarkeit.

2.1. Im folgenden setzen wir

$$a_n = a'_n - i\,a''_n \quad \text{für} \quad n \geqq 1, \qquad a_0 = \tfrac{1}{2} a'_0 \quad (a'_n, a''_n \text{ reell})$$

[8]) Betrachte z.B. $\sum z^n$ im Fall $\alpha = 0$.

[9]) Ist nämlich $b_n = a(n^\beta)$, so auch $b_n = a((n+k)^\beta)$ und umgekehrt.

und betrachten die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Re\, a_n e^{in\varphi} = \tfrac{1}{2} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos n\varphi + a_n'' \sin n\varphi$$

bzw. die dazu konjugierte Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Im\, a_n e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n'' \cos n\varphi + a_n' \sin n\varphi .$$

Durch formale q-malige Integration der trigonometrischen Reihe $\sum \Re\, a_n e^{in\varphi}$ erhalten wir die Reihe

$$\frac{1}{2} a_0' \frac{\varphi^q}{q!} + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \frac{a_n}{(in)^q} e^{in\varphi} .$$

Ist z.B. $\overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha)$ mit $\alpha > -1$, also nach Hilfssatz 1 $a_n = O(n^{\alpha+p})$, so ist für $q = k+p+2$ $(k \leqq \alpha < k+1$, also $k+p+2 > \alpha+p+1 > 0)$ diese integrierte Reihe (überall) absolut und gleichmäßig konvergent und stellt daher eine stetige Funktion $F_q(\varphi)$ dar.

Wir wollen aus Satz 1 den folgenden Lokalisationssatz ableiten:

Satz 2. *Zwei trigonometrische Reihen* $\sum_0^\infty \Re\, a_n e^{in\varphi}$ *und* $\sum_0^\infty \Re\, b_n e^{in\varphi}$ *sind genau dann für* $|\varphi| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ $|C_\alpha|$*-äquisummierbar*[10] $(\alpha > -1)$, *wenn gilt*

a) *für eine ganze Zahl* $p \geqq 0$ *ist*

$$\overline{\Delta}^p \frac{a_n - b_n}{(n+1)^\alpha} = a(1) \quad \textit{oder auch} \quad \overline{\Delta}^p (a_n - b_n) = a(n^\alpha);$$

b) *das* $(k+p+2)$*-fache formale Integral* $G_{k+p+2}(\varphi)$ *der Reihe* $\sum_0^\infty \Re\,(a_n - b_n) e^{in\varphi}$ *läßt sich zu einer periodischen*[11] *Funktion* $P(\varphi)$ *abändern, so daß*

$$P(\varphi) = G_{k+p+2}(\varphi) \quad \textit{für} \quad |\varphi| < \varepsilon$$

ist und die $(k+p+2)$*-mal differenzierte* FOURIER*-Reihe von* $P(\varphi)$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ $|C_\alpha|$*-summierbar ist.*

Die genauen Bedingungen für die $|C_\alpha|$*-Äquisummierbarkeit der konjugierten Reihen* $\sum \Im\, a_n e^{in\varphi}$ *und* $\sum \Im\, b_n e^{in\varphi}$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ *sind:*

---

[10]) Zwei derartige Reihen heißen $|C_\alpha|$-, C_α- bzw. gleichmäßig C_α-äquisummierbar, falls die Differenz der Reihen $\sum_0^\infty \Re\,(a_n - b_n)\, e^{in\varphi}$ $|C_\alpha|$-, C_α- bzw. gleichmäßig C_α-summierbar ist. Äquisummierbarkeit im engeren Sinn besagt darüber hinaus Summierbarkeit gegen Null. Auf Grund dieser Definition gibt Satz 2 gleichzeitig genaue Bedingungen für die Summierbarkeit einer trigonometrischen Reihe an.

[11]) Hier und im folgenden periodisch mit 2π und integrierbar, falls die FOURIER-Reihe der Funktion auftritt.

$\bar{a}) = a)$ *und*

$\bar{b})$ *das in* b) *definierte Integral* $G_{k+p+2}(\varphi)$ *läßt sich zu einer periodischen Funktion* $P(\varphi)$ *abändern, so daß*

$$P(\varphi) = G_{k+p+2}(\varphi) \quad \text{für} \quad |\varphi| < \varepsilon$$

ist und die $(k+p+2)$*-mal differenzierte konjugierte* Fourier*-Reihe*[12]) *von* $P(\varphi)$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ $|C_\alpha|$*-summierbar ist.*

Zusatz 1. Betrachtet man an Stelle der absoluten Summierbarkeit die gewöhnliche C_α-Summierbarkeit, so bleibt Satz 2 wörtlich richtig, wenn man bei den Bedingungen a) und $\bar{a})$ entsprechend das Symbol a durch o ersetzt. Ferner ist dabei die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty \Re(a_n - b_n)\, e^{in\varphi}$ [falls vorhanden] für $|\varphi| < \varepsilon$ gleich der C_α-Summe der $(k+p+2)$-mal differenzierten Fourier-Reihe von $P(\varphi)$.

Zusatz 2. Ersetzt man in Satz 2 überall $|C_\alpha|$-Summierbarkeit für $|\varphi| < \varepsilon$ durch gleichmäßige C_α-Summierbarkeit in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $|\varphi| < \varepsilon$, so bleibt alles wörtlich richtig, wenn man nur bei den Bedingungen a) und $\bar{a})$ entsprechend das Symbol a durch o ersetzt. Ferner ist dabei die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty \Re(a_n - b_n)\, e^{in\varphi}$ für $|\varphi| < \varepsilon$ gleich (der dort vorhandenen Ableitung) $\frac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+p+2}} P(\varphi) = \frac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+p+2}} G_{k+p+2}(\varphi)$.

Der Satz 2 stellt die Verallgemeinerung unseres früheren Ergebnisses[13]) bei absoluter Konvergenz ($\alpha = 0$) auf beliebige $|C_\alpha|$-Summierbarkeit ($\alpha > -1$) dar. Die beiden Zusätze sind im wesentlichen bekannt[14]) und zeigen die Analogie zwischen den verschiedenen Konvergenzbegriffen. Die Beweise werden sich für den Satz 2 und die Zusätze einheitlich führen lassen, indem sie auf Satz 1 und die dortigen Zusätze zurückgeführt werden.

2.2. Dem Beweis von Satz 2 schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 6. *Ist eine Reihe* $\sum a_n$ $|C_\alpha|$- *bzw.* C_α*-summierbar* $(\alpha > -1)$, *so ist* $a_n = a(n^\alpha)$ *bzw.* $= o(n^\alpha)$.

Beweis. Für gewöhnliche Summierbarkeit ist dies bekannt. Im absoluten Fall folgt es für $\alpha \geqq 0$ z.B. aus einem Satz von Kogbetliantz[15]), nach dem sogar $\sum \left| \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} \right| < \infty$ ist. Im Fall $-1 < \alpha < 0$ setzen wir für $n \geqq 1$ $b_n = (n+1)\, a_n - (n-1)\, a_{n-1}$ d.h. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, b_\nu$. Die Reihe $\sum b_n$ ist

[12]) Dies soll ausführlicher heißen: die zu der Fourier-Reihe konjugierte Reihe.
[13]) Vgl. Jurkat-Peyerimhoff [1953], Satz 2.
[14]) Vgl. Zygmund [1926], S. 99.
[15]) Vgl. etwa Peyerimhoff [1952], Satz 1.

dann $|C_\alpha C_1|$- und deshalb auch $|C_{\alpha+1}|$-summierbar [vgl. Fußnote [6])]. Daher gilt $\sum \left|\frac{b_n}{(n+1)^{\alpha+1}}\right| < \infty$, ferner wegen $|C_\alpha| \leqq |C_0|$ auch $\sum |a_n| < \infty$, und die Behauptung ist nun unmittelbar aus

$$\frac{b_n}{(n+1)^{\alpha+1}} = \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} - \frac{a_{n-1}}{n^\alpha} + a_{n-1} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

abzulesen [vgl. Fußnote [9])].

Hilfssatz 7. *Ist für* $|\varphi| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$

$$\Re a_n e^{in\varphi} = a(1) \quad \text{d.h.} \quad \sum_1^\infty |\overline{\Delta} \Re a_n e^{in\varphi}| < \infty, \tag{6}$$

so ist $\sum |a_n| < \infty$, *insbesondere also* $a_n e^{in\varphi} = a(1)$ *für alle* φ. (Ersetzt man bei (6) das Symbol a durch o, so folgt bekanntlich nur $a_n e^{in\varphi} = o(1)$.)

Beweis. Es sei $\frac{\pi}{m} < \varepsilon$ $(m > 0$ ganz). Wegen (6) ist für $k = 1, \ldots, m-1$, m

$$\sum_{\varrho=1}^\infty |\Re a_{m\varrho+k} e^{i(m\varrho+k)\varphi} - \Re a_{m\varrho} e^{im\varrho\varphi}| < \infty, \tag{7}$$

und dies gibt für $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{m}$

$$\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho+k} - \Re a_{m\varrho}| < \infty, \qquad \sum_\varrho \left|\Re a_{m\varrho+k} e^{i\frac{k\pi}{m}} - \Re a_{m\varrho}\right| < \infty.$$

Für $k = m$ folgt hieraus $\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho}| < \infty$ und daher weiter

$$\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho+k}| < \infty, \qquad \sum_\varrho \left|\Re a_{m\varrho+k} e^{i\frac{k\pi}{m}}\right| < \infty,$$

also für $k = 1, \ldots, m-1$ auch $\sum_\varrho |\Im a_{m\varrho+k}| < \infty$ oder insgesamt $\sum |a_{m\varrho+k}| < \infty$. Wegen (7) gilt dann weiter $\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho} e^{im\varrho\varphi}| < \infty$ und daher nach einem Satz von LUSIN-DENJOY (vgl. ZYGMUND [1935], S. 131) sogar $\sum_\varrho |a_{m\varrho}| < \infty$. Zusammengenommen ist also $\sum |a_n| < \infty$, q.e.d.

Hilfssatz 8. *Notwendig für die* $|C_\alpha|$- *bzw.* C_α-*Summierbarkeit* $(\alpha > -1)$ *der Reihe* $\sum \Re a_n e^{in\varphi}$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ *ist*

$$\sum_1^\infty \left|\frac{a_n}{n^\alpha}\right| < \infty \quad \textit{bzw.} \quad a_n = o(n^\alpha).$$

Im Falle der $|C_\alpha|$-*Summierbarkeit mit* $-1 < \alpha \leqq 0$ *ist diese Bedingung zugleich auch hinreichend und es liegt dann sogar absolute und gleichmäßige Summierbarkeit für alle* φ *und außerdem dasselbe für die konjugierte Reihe vor.*

Der Beweis ergibt sich durch Kombination der Hilfssätze 6, 7 und 4.

2.3. Beweis von Satz 2. Die Notwendigkeit der Koeffizientenbedingung (mit $p = 0$) folgt aus Hilfssatz 8 durch Betrachtung der Reihe $\sum \Re c_n e^{in\varphi}$, wobei

$c_n = a_n - b_n$ gesetzt ist. Im folgenden bezeichnen wir mit $\mu(\varphi) = \mu_q(\varphi, \delta, \varepsilon)$ eine periodische Funktion mit

$$\mu_q(\varphi, \delta, \varepsilon) = \frac{\delta}{2}\frac{\varphi^q}{q!} \quad \text{für} \quad |\varphi| \leq \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < \pi) \tag{8}$$

und mit FOURIER-Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n^{q+2}}\right)$, so daß ihre FOURIER-Reihe und konjugierte Reihe nach q-maliger Differentiation für jedes $\alpha > -1$ in $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gleichmäßig C_α-summierbar und $|C_\alpha|$-summierbar sind[16]). Die Notwendigkeit von b) und $\bar{b}$) folgt dann durch Betrachtung von

$$P(\varphi) = G_{k+p+2}(\varphi) - \frac{c_0'}{2}\frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p+2)!} + \mu_{k+p+2}(\varphi, c_0', \varepsilon).$$

Dies gilt einheitlich für Satz 2 und die Zusätze.

Für den hinreichenden Teil des Beweises untersuchen wir die trigonometrische Reihe $\sum_1^\infty \Re(c_n - d_n)\, e^{in\varphi}$; dabei ist $\sum_1^\infty \Re\, d_n\, e^{in\varphi}$ die $(k+p+2)$-fach formal abgeleitete FOURIER-Reihe der Funktion $P(\varphi) - \mu_{k+p+2}(\varphi, c_0', \varepsilon)$. Auf Grund der Voraussetzungen erfüllt nach Hilfssatz 8 d_n die gleichen Koeffizientenbedingungen wie c_n, und für das $(k+p+2)$-fache Integral unserer Reihe gilt

$$\begin{aligned} H_{k+p+2}(\varphi) &= \sum_1^\infty \Re\frac{c_n - d_n}{(in)^{k+p+2}} e^{in\varphi} \\ &= \left(G_{k+p+2}(\varphi) - \frac{c_0'}{2}\frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p+2)!}\right) - \left(P(\varphi) - \mu_{k+p+2}(\varphi) - \gamma\right), \end{aligned}$$

so daß $H_{k+p+2}(\varphi) = \gamma$ ist für $|\varphi| < \varepsilon$. Nach der FOURIERschen Koeffizientenformel ist für $n \geq 1$

$$c_n - d_n = \frac{(in)^{k+p+2}}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(H_{k+p+2}(\varphi) - \gamma\right) e^{-in\varphi}\, d\varphi$$

und daher für $|z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_1^\infty (c_n - d_n) z^n &= \frac{i^{k+p+2}}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(H_{k+p-2}(\varphi) - \gamma\right) \sum_1^\infty n^{k+p+2} (e^{-i\varphi} z)^n\, d\varphi \\ &= \frac{i^{k+p+2}}{\pi}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(H_{k+p+2}(\varphi) - \gamma\right) K(e^{-i\varphi} z)\, d\varphi. \end{aligned}$$

Da die Funktion $K(\xi)$ für alle $\xi \neq 1$ regulär ist, so ist $f(z)$ regulär für alle Punkte des Bogens $z = e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \varepsilon$. Da ferner $c_n - d_n$ die Koeffizientenbedingung von Satz 1 bzw. der Zusätze erfüllen, so ist nach Satz 1 und den Bemerkungen in § 1.4 die Reihe $\sum_1^\infty (c_n - d_n)\, e^{i\varphi n}$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $|\varphi| < \varepsilon$ gleichmäßig C_α-summierbar und im absoluten Fall

[16]) Vgl. Hilfssatz 8.

außerdem $|C_\alpha|$-summierbar. Weiter ist die C_α-Summe von $\sum_1^\infty \Re(c_n - d_n)\, e^{in\varphi}$ für $|\varphi| < \varepsilon$ gleich $\frac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+p+2}} H_{k+p+2}(\varphi) \equiv 0$[17]). Je nach den Voraussetzungen über $P(\varphi)$ ist die Reihe $\sum \Re d_n e^{in\varphi}$ oder $\sum \Im d_n e^{in\varphi}$ absolut, gewöhnlich oder gleichmäßig summierbar, und diese Eigenschaften übertragen sich jetzt nach unseren Ergebnissen über $\sum (c_n - d_n) e^{i\varphi n}$ auf die Reihen $\sum \Re c_n e^{in\varphi}$ oder $\sum \Im c_n e^{in\varphi}$. Da weiter nach Fußnote [17]) die $(k+p+2)$-fach abgeleitete FOURIER-Reihe der Funktion $\mu_{k+p+2}(\varphi, c_0', \varepsilon)$ für $|\varphi| < \varepsilon$ zum Wert $\frac{1}{2} c_0'$ C_α-summierbar ist, so ist die Reihe $\frac{1}{2} c_0' + \sum_1^\infty \Re c_n e^{in\varphi}$ und die $(k+p+2)$-fach abgeleitete FOURIER-Reihe der Funktion $P(\varphi)$ [im Falle b)] zum gleichen Wert summierbar, bei gleichmäßiger Summierbarkeit wieder nach Fußnote [17]) zur Ableitung $\frac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+p+2}} P(\varphi)$. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

2.4. Wir wollen noch einige Bemerkungen über die in Satz 2 auftretenden Bedingungen anschließen. Die Bedingungen b) und $\bar{\text{b}}$) sind (auch im Falle der Zusätze) erfüllt, wenn $G_{k+p-2}(\varphi)$ für $|\varphi| \leq \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ beliebig oft differenzierbar ist, denn $G_{k+p+2}(\varphi)$ kann dann von $|\varphi| \leq \varepsilon$ aus zu einer für alle φ hinreichend oft differenzierbaren Funktion fortgesetzt werden. Ist $G_{k+p+2}(\varphi)$ nur für $|\varphi| < \varepsilon$ beliebig oft differenzierbar, so betrachte man alle abgeschlossenen Teilintervalle $|\varphi| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ und wende hierauf Satz 2 bzw. die Zusätze an. Dies gibt zusammengenommen das gleiche Resultat wie vorher. Die Bedingungen b) und $\bar{\text{b}}$) sind trivialerweise erfüllt, wenn $G_{k+p+2}(\varphi)$ für $|\varphi| < \varepsilon$ durch ein Polynom dargestellt werden kann. Besitzt dieses Polynom einen Grad $\leq k+p+2$, so sind die beiden (ursprünglichen, nicht notwendig die konjugierten!) Reihen sogar im engeren Sinne äquisummierbar. Ganz all-

[17]) Hierbei benutzen wir (mit geeignetem $\varkappa \geq \alpha$) den folgenden Satz: Erfüllt eine Funktionenfolge $f_n(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ $(-\infty < a < b < \infty)$ die Bedingungen

a) $f_n(x)$ ist q-mal differenzierbar $(q \geq 1)$,

b) $\sum f_n(x)$ ist $C_\varkappa$-summierbar $(\varkappa > -1)$ für $x = a_1 \ldots a_q$ mit $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$,

c) $\sum \frac{d^q}{dx^q} f_n(x)$ ist gleichmäßig $C_\varkappa$-summierbar,

so gilt für $0 \leq p \leq q$

$$\frac{d^p}{dx^p} C_\varkappa - \sum f_n(x) = C_\varkappa - \sum \frac{d^p}{dx^p} f_n(x),$$

wobei die auftretenden Summen gleichmäßig konvergieren und die zu bildenden Ableitungen vorhanden sind. [Beweis durch Zurückführung auf bekannte Sätze unter Beachtung des bezüglich $f_n(x)$ linearen Charakters der $C_\varkappa$-Transformation].

In dem obigen speziellen Fall erhält man übrigens für die $C_\alpha - \sum_1^\infty \Re(c_n - d_n)\, e^{in\varphi}$ auch direkt nach den Zusätzen zu Satz 1

$$\Re f(e^{i\varphi}) = \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} (H_{k+p+2}(\vartheta) - \gamma)\, \Re i^{k+p+2} K(e^{i(\varphi-\vartheta)})\, d\vartheta \equiv 0 \quad (|\varphi| < \varepsilon),$$

da $\Re i^{k+p+2} K(e^{it}) \equiv 0$ ist für $0 < t < 2\pi$, wie man leicht nachprüft.

emein zeigen die Bedingungen b) und $\bar{b}$), daß das Summierbarkeitsverhalten er trigonometrischen Reihen (mit einer gewissen Koeffizientenbedingung) okal vom Verhalten des $(k+p+2)$-fachen Integrals abhängt. Zum Beispiel ntscheiden für die Summierbarkeit im Punkte $\varphi=0$ die Werte des Integrales n einer beliebig kleinen Umgebung $|\varphi|<\varepsilon$, d.h. wir haben „Lokalisation bezüglich des $(k+p+2)$-fachen Integrals".

Der Satz 2 und die Zusätze bezogen sich auf die Summierbarkeit in einer Umgebung des Punktes $\varphi=0$. Vermöge der Beziehung

$$\Re\, c_n e^{in\varphi} = \Re\,(c_n e^{in\varphi_0}\cdot e^{in\psi}) \quad \text{mit} \quad \psi=\varphi-\varphi_0$$

können aber die Überlegungen auf die Umgebung eines beliebigen Punktes φ_0 (entspricht $\psi=0$) übertragen werden. Bei den Bedingungen b) und $\bar{b}$) ist dann nur $|\varphi|<\varepsilon$ durch $|\varphi-\varphi_0|<\varepsilon$ zu ersetzen und bei den Bedingungen a) und $\bar{a}$) treten an die Stelle der Koeffizienten $c_n=c_n'-i\,c_n''$ die Koeffizienten $c_n e^{in\varphi_0}=\Re\, c_n e^{in\varphi_0}-i\,(-\Im\, c_n e^{in\varphi_0})$. Diese Bedingungen sind nur im o-Fall mit $\varphi_0=0$ mit den früheren Koeffizientenbedingungen äquivalent, d.h. im allgemeinen sind die Koeffizientenbedingungen auch lokal. Ist aber einmal die Bedingung b) oder $\bar{b}$) für das Integral mit $\varphi_0=0$ erfüllt, so folgt aus der Koeffizientenbedingung für $\varphi_0=0$ die gleiche Bedingung für jedes andere φ_0, denn dann gelten nach Hilfssatz 8 sogar die nicht lokalen Bedingungen

$$\sum_1^\infty \left|\frac{c_n}{n^\alpha}\right|<\infty \quad \text{bzw.} \quad c_n=o(n^\alpha).$$

Dies zeigt auch unmittelbar, daß die Bedingungen von Satz 2 die des zugehörigen Zusatzes 1 nach sich ziehen, was auch wegen $|C_\alpha|\leqq C_\alpha$ richtig sein muß. Ferner erkennt man (vgl. Hilfssatz 8), daß für $-1<\alpha\leqq 0$ die absolute Äquisummierbarkeit für $|\varphi|<\varepsilon$ das gleiche für alle φ und außerdem für die konjugierten Reihen zur Folge hat. Dann sind also die Bedingungen b) und $\bar{b}$) gleichwertig und von ε unabhängig (wenn die Koeffizientenbedingung erfüllt ist). Darüber hinaus folgen dann aus den Bedingungen von Satz 2 auch die Bedingungen des zugehörigen Zusatzes 2 (mit jedem ε).

§ 3. Die Riemannschen Formeln bei $|C_\alpha|$-Summierbarkeit.

3.1. Als Folgerung aus Satz 2 erhalten wir ein Analogon zu den RIEMANNschen Formeln, das noch einmal die Lokalisation bezüglich des $(k+p+2)$-fachen Integrals herausstellt.

Satz 3. *Es sei* $\sum_0^\infty \Re\, a_n e^{in\varphi}$ *eine trigonometrische Reihe mit Koeffizienten* $\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}=a(1)$ *oder auch* $\overline{\Delta}^p a_n=a(n^\alpha)$ $(\alpha>-1,\ p\geqq 0$ *ganz*$)$. *Ferner sei* $\lambda(t)$ *eine periodische Funktion mit* FOURIER*-Koeffizienten*[18] $O\left(\frac{1}{n^{k+p+5}}\right)$ $(k\leqq\alpha<k+1)$

[18]) Für $\alpha\geqq 0$ darf der Exponent sogar durch $k+p+4$ ersetzt werden. Im Falle $\varphi_0=0$ vgl. hierzu JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], Satz 3.

und $\lambda(t) = 1$ *für* $|t| \leqq \varepsilon$, $\lambda(t) = 0$ *für* $\varepsilon_1 \leqq |t| \leqq \pi$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_1 < \pi)$. *Ist schließlich* $F_{k+p+2}(\varphi)$ *das zur Ausgangsreihe gehörige* $(k+p+2)$*-fache Integral, so sind für* $|\varphi| < \varepsilon$ *die Ausdrücke*

$$(9) \qquad \sum_0^m \Re\, a_n e^{in\varphi} - \frac{(-1)^{k+p}}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} F_{k+p+2}(t)\, \lambda(t)\, \frac{d^{k+p+2}}{dt^{k+p+2}} D_m(t-\varphi)\, dt$$

und

$$(10) \qquad \sum_0^m \Im\, a_n e^{in\varphi} - \frac{(-1)^{k+p+1}}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} F_{k+p+2}(t)\, \lambda(t)\, \frac{d^{k+p+2}}{dt^{k+p+2}} \overline{D}_m(t-\varphi)\, dt$$

(als Folgen in m aufgefaßt) $|C_\alpha|$*-limitierbar. Die dabei auftretenden Kerne sind*

$$D_m(t) = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \qquad \overline{D}_m(t) = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Zusatz[19]). Ersetzt man bei den Koeffizientenbedingungen das Symbol O durch o, so sind die Ausdrücke (9) und (10) für jedes abgeschlossene Teilintervall von $|\varphi| < \varepsilon$ gleichmäßig C_α-limitierbar, (9) sogar zum Grenzwert 0.

3.2. Beweis. Das Integral in (9) mit Vorzeichen stellt die m-te Teilsumme der $(k+p+2)$-mal differenzierten FOURIER-Reihe der Funktion

$$(11) \quad F_{k+p+2}(\varphi)\,\lambda(\varphi) = \left[\left(F_{k+p+2}(\varphi) - \frac{a_0'}{2}\frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p-2)!}\right) + \mu_{k+p+2}(\varphi, a_0', \varepsilon_1)\right]\lambda(\varphi)$$

dar [vgl. die Definition (8) von $\mu(\varphi)$], also die m-te Teilsumme einer trigonometrischen Reihe $\sum_0^\infty \Re\, b_n e^{in\varphi}$. Entsprechend ist das Integral in (10) mit Vorzeichen die m-te Teilsumme der hierzu konjugierten Reihe. Wir haben im wesentlichen die Äquisummierbarkeit der mit a_n und b_n gebildeten Reihe zu zeigen. Dazu stellen wir fest, daß das $(k-p+2)$-fache Integral der Reihe $\sum_0^\infty \Re(a_n - b_n) e^{in\varphi}$ durch

$$G_{k+p+2}(\varphi) = F_{k+p+2}(\varphi) - \left(F_{k+p+2}(\varphi)\,\lambda(\varphi) - \gamma\right) \quad \text{mit} \quad \gamma = \text{const.}$$

gegeben wird, so daß $G_{k+p+2}(\varphi) = \gamma$ ist für $|\varphi| \leqq \varepsilon$. Alle Behauptungen von Satz 3 (oder des Zusatzes) folgen daher aus Satz 2 (oder dem dortigen Zusatz), wenn wir den Nachweis der noch fehlenden Koeffizientenbedingung (vgl. Hilfssatz 2)

$$(12) \qquad \overline{\Delta}^p \frac{b_n}{(n+1)^\alpha} = a(1) \qquad \left(\text{oder} \qquad \overline{\Delta}^p \frac{b_n}{(n+1)^\alpha} = o(1)\right)$$

erbringen können.

[19]) Vgl. im Falle der gewöhnlichen Summierbarkeit ZYGMUND [1935], S. 305 und 28 ferner ZYGMUND [1926].

Mit den Bezeichnungen von § 2.1 setzen wir für $n \geqq 1$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2} a'_n - \frac{i}{2} a''_n, \qquad \alpha_{-n} = \frac{1}{2} \bar{a}_n = \frac{1}{2} a'_n + \frac{i}{2} a''_n$$

und

$$\alpha_0 = a_0 = \tfrac{1}{2} a'_0,$$

so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Re\, a_n e^{in\varphi} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{in\varphi}$$

ist und entsprechend mit anderen Buchstaben. Dann ist

$$F_{k+p+2}(\varphi) - \frac{a'_0}{2} \frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p+2)!} = \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{(in)^{k+p+2}} e^{in\varphi},$$

und weiter sei etwa

$$\mu_{k+p+2}(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\varphi}, \qquad \lambda(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n e^{in\varphi},$$

wobei auf Grund der Voraussetzungen für $n \to \infty$ gilt

$$\bar{\Delta}^p \frac{\alpha_{\pm n}}{(n+1)^\alpha} = a(1), \qquad \gamma_{\pm n} = O\left(\frac{1}{n^{k+p+4}}\right), \qquad \delta_{\pm n} = O\left(\frac{1}{n^{k+p+5}}\right)^{18}).$$

Eine einfache Rechnung gibt unter Benutzung von (11) für $n \geqq 1$

$$b_n = 2n^{k+p+2}\left(\sum_{\nu \neq 0} \frac{\alpha_\nu}{\nu^{k+p+2}} \delta_{n-\nu} + i^{k+p+2} \sum_{\nu} \gamma_\nu \delta_{n-\nu}\right),$$

und die behauptete Abschätzung (12) folgt sofort aus dem nachstehenden Hilfssatz 9.

3.3. Hilfssatz 9. *Es seien γ_n und δ_n Zahlenfolgen mit den Eigenschaften*

(13) $\bar{\Delta}^p(n^\lambda \gamma_{\pm n}) = a(1)$ [20] *mit* $p \geqq 0$ *(ganz),* $\lambda > p+1$

und

(14) $\delta_{\pm n} = O(n^\varrho)$ *mit* $\varrho < -(\lambda+1), \quad \varrho < -(p+3)$.

Dann existiert $\beta_n = n^\lambda \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \gamma_\nu \delta_{n-\nu}$ für $n \geqq 1$, und es gilt $\bar{\Delta}^p \beta_n = a(1)$ für $n \to \infty$.

Beweis. In der für $x > 0$ gleichmäßig gültigen Entwicklung

$$x^\lambda = \sum_{\mu=0}^{q-1} k_\mu (x-1)^\mu + O(1)(x-1)^q (1 + x^{\lambda-q})$$

setzen wir $x = \frac{n}{\nu}$ und $q = p+2$ und erhalten so gleichmäßig für $n \geqq 1$, $\nu \geqq 1$

$$n^\lambda = \sum_{\mu=0}^{p+1} k_\mu \nu^{\lambda-\mu}(n-\nu)^\mu + O(1)(n-\nu)^{p+2}(\nu^{\lambda-p-2} + n^{\lambda-p-2}).$$

[20]) Hier und im folgenden sind die Glieder einer Zahlenfolge durch Null zu ersetzen, wenn der definierende Ausdruck für spezielle Werte von n sinnlos wird (so wie z. B. $n^{-\frac{1}{2}}$ für $n \leqq 0$).

Damit wird

$$\beta_n = n^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{-\nu}\, \delta_{n+\nu} + \sum_{\mu=0}^{p+1} k_\mu \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\lambda-\mu}\, \gamma_\nu\, (n-\nu)^\mu\, \delta_{n-\nu} +$$

$$+ O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu\, \delta_{n-\nu}|\, |n-\nu|^{p+2}\, (\nu^{\lambda-p-2} + n^{\lambda-p-2}) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

Auf Grund der Voraussetzungen gilt $\gamma_{\pm n} = O(n^{p-\lambda})$, und daher ist $\mathrm{I} = O(n^{\lambda+\varrho}) = a(1)$ und weiter[21])

$$\mathrm{III} = O(n^{-2}) + O(n^{\varrho+p+2}) + O(n^{\varrho+\lambda}) = a(1).$$

Daher bleibt nur $\overline{\Delta}^p \mathrm{II} = a(1)$ zu zeigen, und dies folgt aus der für $\mu = 0, \ldots$ $p+1$ gültigen Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{\nu=-\infty}^{n-1} \overline{\Delta}_n^{p+1} [(n-\nu)^{\lambda-\mu}\, \gamma_{n-\nu}]\, \nu^\mu\, \delta_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |\nu^\mu\, \delta_\nu| \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\Delta}^{p+1}\, n^{\lambda-\mu}\, \gamma_n| < \infty,$$

wobei wegen Hilfssatz 2 $\overline{\Delta}^p (n^{\lambda-\mu}\, \gamma_n) = a(n^{-\mu}) = a(1)$ benutzt werden durfte.

Hilfssatz 9 bleibt richtig, wenn man überall $a(1)$ durch $o(1)$ ersetzt, wie ein ähnlicher (aber im ganzen einfacherer) Beweis zeigt. Hiermit folgt dann natürlich auch die o-Abschätzung in (12).

Literatur.

BIEBERBACH, L.: Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variabeln. Encykl. math. Wiss. **2**, C 4 (1920). — CHOW, H. C.: On the summability of a power series. Acad. Sinica Sci. Rec. **2**, 20—21 (1947). — CHOW, H. C.: On the summability $|C|$ of a power series. Quart. J. Math. (2) **4**, 152—160 (1953). — JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Der Satz von FATOU-RIESZ und der RIEMANNsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz. Arch. Math. **4**, 285—297 (1953). — KNOPP, K., u. G. G. LORENTZ: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math. **2**, 10—16 (1950). — PEYERIMHOFF, A.: Über einen Satz von Herrn KOGBETLIANTZ aus der Theorie der absoluten CESÀROschen Summierbarkeit. Arch. Math. **3**, 262—265 (1952). — RIESZ, M.: Über einen Satz des Herrn FATOU. J. reine angew. Math. **140**, 89—99 (1911). — ZYGMUND, A.: Sur la théorie des séries trigonométriques. Math. Z. **24**, 47—104 (1926). — ZYGMUND, A.: Trigonometrical series. Warszawa 1935.

[21]) Allgemein folgt aus $\gamma_{\pm n} = O(n^\varkappa)$, $\delta_{\pm n} = O(n^\varrho)$ mit $\varkappa, \varrho < -1$ die Abschätzung $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\gamma_\nu\, \delta_{n-\nu}| = O(n^\varkappa) + O(n^\varrho)$ für $n \to \infty$.

Dept. of Math., University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio (U.S.A.).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 3. Februar 1954.)

Hornfeck, B.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 271—273 (1954)

Ein Satz über die Primzahlmenge.

Von
Bernhard Hornfeck.

Nach Herrn Ostmann[1]) heißt eine Menge $\mathfrak{M}$ nicht negativer ganzer Zahlen *irreduzibel*, wenn sie nicht als Schnirelmann-Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ zweier Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit mindestens je zwei Elementen darstellbar ist. Herr Wirsing[2]) nennt eine Menge $\mathfrak{M}$ *total irreduzibel*, wenn auch jede Menge $\mathfrak{M}'$, die von einer Stelle an mit $\mathfrak{M}$ übereinstimmt, irreduzibel ist, und beweist: *Fast alle Mengen* $\mathfrak{M}$ *sind total irreduzibel.*

Den Inhalt dieser Note bildet der

Satz: *Die Primzahlmenge* $\mathfrak{P}=\{p_1, p_2, \ldots\}=\{2, 3, 5, \ldots\}$ *ist total irreduzibel.*

Beweis. $\mathfrak{P}^*=\{p_1^*, p_2^*, \ldots\}$ stimme von einer Stelle an mit $\mathfrak{P}$ überein, und es sei

$$\mathfrak{P}^*=\mathfrak{A}+\mathfrak{B} \tag{1}$$

mit $\mathfrak{A}=\{a_1=p_1^*, a_2, \ldots\}$, $\mathfrak{B}=\{b_1=0, b_2, \ldots\}$, und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien nicht einelementig. Einer der Summanden $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ ist gewiß unendlich; sei dies $\mathfrak{A}$.

Zunächst muß auch $\mathfrak{B}$ unendlich sein. Wäre nämlich etwa $\mathfrak{B}=\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ endlich und $k\geq 2$, so ergäbe (1) in Verbindung mit dem Primzahlsatz

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\log x}} \geq \frac{1}{k}\ ^{3}). \tag{2}$$

Andererseits gibt es nach Herrn Knödel[4]) zu jedem k-tupel von nicht negativen ganzen Zahlen $b_1=0, b_2<b_3<\cdots<b_k$ weniger als

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)\frac{x}{\log^k x} \tag{3}$$

Primzahlen $p_i\leq x$, für die auch alle p_i+b_λ $(\lambda=1, 2, \ldots, k)$ Primzahlen sind. Demnach wäre

$$A(x)<c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)\frac{x}{\log^k x}, \qquad k\geq 2, \tag{4}$$

[1]) Ostmann, H.: Über den Summenbegriff in der additiven Zahlentheorie. Math. Ann. **120**, 165—196 (1948).

[2]) Wirsing, E.: Ein metrischer Satz über Mengen ganzer Zahlen. Arch. Math. IV, 392—398 (1954).

[3]) $A(x)$ ist die Anzahlfunktion von $\mathfrak{A}$, d.h. die Anzahl aller $a_i\in\mathfrak{A}$, $0<a_i\leq x$; entsprechend $B(x)$ usw.

[4]) Knödel, W.: Sätze über Primzahlen. Mh. Math. **55**, 62—75 (1951). Diese Arbeit wird im folgenden mit [K] zitiert.

oder

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\log x}} = 0 \tag{5}$$

im Widerspruch zu (2).

Der Satz ist also bewiesen, wenn wir die Unmöglichkeit von (1) mit unendlichen Summanden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zeigen.

Wie bei der Herleitung von (5) aus (3) erhält man bei unendlichem $\mathfrak{B}$ aus (3)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\log^{k-1} x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{\frac{x}{\log^{k-1} x}} = 0 \quad \text{für alle} \quad k \geqq 2$$

oder

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\log^{k} x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{\frac{x}{\log^{k} x}} = 0 \quad \text{für alle} \quad k \geqq 1; \tag{6}$$

wegen $A(x)\cdot B(x) \geqq c_2 \cdot P^*(x) > c_3 \frac{x}{\log x}$ liefert (6) noch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\log^{k} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{\log^{k} x} = \infty \quad \text{für alle} \quad k \geqq 1. \tag{7}$$

Hieraus erhält man für $x_0 \geqq c_4 > e^{e^e}$ [5])

$$b_k < c_6 \log^k x_0 \quad (x_0 \geqq c_4); \tag{8}$$

denn gäbe es immer wieder einmal ein $b_k > c_6 \log^k x_0 = c_6 y^k$ ($c_6 > 1$, beliebig), so würde immer wieder einmal (y fest)

$$\frac{B(c_6 y^k)}{\log^2 (c_3 y^k)} < \frac{k}{k^2 \log^2 y} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

gelten im Widerspruch zu (7).

Ist aber (8) erfüllt, so läßt sich in (3) die Konstante $c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ weiter nach oben abschätzen. In [K] zeigt Herr KNÖDEL, daß

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k) = c_7 \left\{ \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^{k - v_s} \right\}^{-1} \tag{9}$$

ist, wobei v_s die Anzahl der mod p_s inkongruenten Lösungen von $\prod_{i=1}^{k} (z + b_i) \equiv 0$ (p_s) ist. (In [K] können $c_4(k)$ und $c_{16}(k)$ durch 1 ersetzt werden, ebenso $c_{22}(k)$ durch c_{22} wegen $e^{-\gamma} < 1$, wo γ die EULERsche Konstante ist; das Produkt in (9) kann bis ∞ erstreckt werden, weil von einer Stelle an $v_s = k$ ist.) Für $v_s \neq k$ kommen nur Primzahlen p_s in Frage, für die aus

$$z + b_i \equiv 0 \,(p_s) \quad \text{für ein gewisses} \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

auch folgt

$$z + b_j \equiv 0 \,(p_s) \quad \text{für ein gewisses} \quad j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \quad j \neq i,$$

oder

$$b_j - b_i \equiv 0 \,(p_s). \tag{10}$$

[5]) x_0 wird so gewählt, daß neben (8) auch die Abschätzungen (16) und (17) richtig sind; dazu muß $\log\log\log x_0 > c_5 > 1$ sein. Das hier fest gewählte x_0 wird in der folgenden Rechnung beibehalten, um den Aufbau der Abschätzung (18) erkennen zu lassen, von der in einer späteren Arbeit Gebrauch gemacht wird.

Seien p_λ die hierfür in Frage kommenden p_s $(v_\lambda < k)$. Wegen $v_\lambda > 0$ gilt

$$\frac{1}{\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^{k-v_s}} < \prod_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)^{-k}. \tag{11}$$

Da es weniger als k^2 Differenzen $b_j - b_i$ gibt, ist wegen (10) und (8)

$$\prod_{\lambda} p_\lambda < \prod_{i<j}(b_j - b_i) < (c_6)^{k^2}\log^{k^3} x_0. \tag{12}$$

In (11) wird die rechte Seite höchstens größer, wenn wir statt der p_λ die ersten Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ nehmen. Dies wollen wir tun, und zwar so weit, daß gerade noch (12) erfüllt ist. Es wird also

$$\left\{\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^{k-v_s}\right\}^{-1} < \prod_{t=1,2,\ldots}\left(1-\frac{1}{p_t}\right)^{-k}, \tag{13}$$

wobei

$$\prod_{t=1,2,\ldots} p_t < (c_6)^{k^3}\log^{k^3} x_0 \tag{14}$$

erfüllt ist.

Statt (14) gilt auch

$$\sum_{t=1,2,\ldots} \log p_t < c_8\, k^5 \log\log x_0. \tag{15}$$

Bekanntlich ist $\vartheta(y) = \sum_{p\leq y} \log p > c_9\, y$. Daher folgt mit $y = \frac{c_8}{c_9}\, k^5 \log\log x_0$ in Verbindung mit (15)

$$p_t < c_{10}\, k^5 \log\log x_0. \tag{16}$$

Deshalb wird in (13)

$$\prod_{t=1,2,\ldots}\left(1-\frac{1}{p_t}\right)^{-k} < c_{11}^k \log^k k \cdot (\log\log\log x_0)^k. \tag{17}$$

Gilt also für die Elemente von $\mathfrak{B}$ die Abschätzung (8), so hat man für $c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ noch

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k) < c_{12}^k \log^k k \cdot (\log\log\log x_0)^k. \tag{18}$$

Wie beim Übergang von (3) zu (4) wäre also, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unendlich sind,

$$f(k, x, x_0) = c_{12}^k (\log k)^k \frac{x}{(\log x)^k} (\log\log\log x_0)^k > A(x). \tag{19}$$

Halten wir x_0 fest $(x_0 \geqq c_4)$, wählen $x = k^{\log k}$ und beachten

$$\lim_{k\to\infty} f(k, k^{\log k}, x_0) = 0, \tag{20}$$

so hieße das, daß $\mathfrak{A}$ kein Element enthielte im Widerspruch zur Annahme. Damit ist der Satz bewiesen.

Berlin, Mathematisches Institut der Freien Universität.

(Eingegangen am 29. Januar 1954.)

Gaschütz, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 274—286 (1954)

Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden*).

Von
Wolfgang Gaschütz.

1. Bettet man eine endliche Gruppe $\mathfrak{g}$ als Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{f}$ in eine freie Gruppe $\mathfrak{F}$ ein und betrachtet den kleinsten Normalteiler $\mathfrak{f}_p$ von $\mathfrak{f}$, für den $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$ abelsch und von Primzahlexponenten p ist, so induzieren offenbar die inneren Automorphismen von $\mathfrak{F}$ eine Darstellung $\mathsf{F}^{(p)}$ von g im Restklassenkörper $\Gamma^{(p)}$ der ganzen rationalen Zahlen modulo p. Wird $\mathfrak{F}$ von e und nicht weniger Elementen erzeugt, so ist ihr Grad nach O. Schreier [10][1]) gleich

$$1 + (e-1)(\mathfrak{g}:1). \tag{1.1}$$

Bei der Bedeutung, die der Zusammenhang endliche Gruppe — freie Gruppe einerseits und die modulare Darstellungstheorie andererseits für das Studium der endlichen Gruppen immer mehr erlangen, scheint mir die Untersuchung dieser Darstellungen eine naheliegende Aufgabe zu sein. Die merkwürdige Abhängigkeit der Zahl (1.1) von e und $\mathfrak{g}$ läßt dabei erwarten, daß die zu gewinnenden Einsichten keine allzu glatte Formulierung gestatten werden. In der vorliegenden Arbeit soll der algebraische Teil dieser Untersuchung durchgeführt und die Struktur der Darstellung $\mathsf{F}^{(p)}$ durch die der regulären Darstellung[2]) beschrieben werden. Alles weitere muß dann der heute noch nicht vollständig durchgeführten feineren, arithmetischen Untersuchung der modularen Gruppenringe überlassen bleiben.

Ein erstes Ergebnis rechtfertigt die Fragestellung weiterhin: Bei festem e gehören alle so gewonnenen Darstellungen zur gleichen Darstellungsklasse, $\mathsf{F}^{(p)}$ hängt also bis auf Transformationen mit einer festen Matrix (Äquivalenz) nicht von der gewählten Einbettung, d.h. nicht von $\mathfrak{f}$ und der elementweisen Identifizierung von $\mathfrak{F}/\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$, sondern nur von $\mathfrak{g}$, p und e ab.

Der Einfluß der Erzeugendenzahl e auf die Darstellung kann mit dem Verfahren von K. Reidemeister zur Bestimmung von Erzeugenden und Relationen für Untergruppen in einfacher Weise angegeben werden. Für jede Erzeugende von $\mathfrak{F}$, die zur Erzeugung von $\mathfrak{g}$ „überflüssig" ist, tritt jeweils einmal die reguläre Darstellung als direkter Summand hinzu. Nach abermaliger Anwendung des Reidemeister-Verfahrens auf eine geeignete Einbettung von $\mathfrak{g}$ läßt sich sodann mit einem Gedanken von H. G. Schumann [11]

*) Herrn Prof. Dr. Kurt Reidemeister zum 60. Geburtstag.

[1]) Die eckigen Klammern beziehen sich auf die Literaturübersicht am Ende der Arbeit.

[2]) Etwa unter Zugrundelegung der Ergebnisse in [1], IX, 7.

die grobe Struktur der Darstellung klären: Ihre irreduziblen Diagonalbestandteile stimmen (auch hinsichtlich der Vielfachheit des Auftretens) bis auf Äquivalenz mit denen der $(e-1)$-fachen regulären Darstellung vermehrt um eine Einsdarstellung vom Grade 1 überein. Für $p \nmid \mathfrak{g}:1$ ist damit nach dem Satz von H. MASCHKE $\mathsf{F}^{(p)}$ vollständig bestimmt.

Diese einfache Beschreibung von $\mathsf{F}^{(p)}$ im Falle $p \nmid \mathfrak{g}:1$ überträgt sich nicht auf den Fall $p \mid \mathfrak{g}:1$. Die dann eintretenden Abweichungen werden im wesentlichen beeinflußt von der Struktur desjenigen unzerlegbaren direkten Summanden der regulären Darstellung von $\mathfrak{g}$, dessen „Kopf" die Einsdarstellung ist. Sie gestattet anzugeben, wie oft ein beliebiger direkter Summand der regulären Darstellung direkter Summand von $\mathsf{F}^{(p)}$ ist, und wie der verbleibende Rest $\mathsf{H}^{(p)}$ beschaffen ist. $\mathsf{H}^{(p)}$ kann auch folgendermaßen invariant durch $\mathfrak{g}$ und p beschrieben werden: Man bilde eine möglichst große Gruppe $\mathfrak{H}$ mit abelschem Normalteiler $\mathfrak{h}$ vom Exponenten p, $\mathfrak{H}/\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \leqq \Phi(\mathfrak{H})$[3]. Wird dann $\mathfrak{h}$ bei den inneren Automorphismen von $\mathfrak{H}$ als Darstellungsmodul für $\mathfrak{g}$ angesehen, so wird durch ihn gerade $\mathsf{H}^{(p)}$ induziert.

Als Nebenresultat stellt sich sogar $\mathfrak{H}$ als Invariante von $\mathfrak{g}$ und p heraus[4]). $\mathfrak{H}$ als Erweiterung mit $\mathfrak{g}$ scheint mir für die SCHREIERsche Erweiterungstheorie[5]) von besonderer Bedeutung zu sein. Sie kann als Träger der Faktorensystembesonderheiten für Erweiterungen mit $\mathfrak{g}$ über abelschen Gruppen vom Exponenten p betrachtet werden[6]). Über ihre Ordnung läßt sich mit dem Vorstehenden und einem Satz von DICKSON eine Aussage machen.

Zum Abschluß werden ein Beispiel behandelt und Anwendungen auf die Bestimmung der Erzeugendenzahlen endlicher Gruppen gemacht.

Die Arbeit bedient sich der Sprache der Darstellungsmoduln, die hier dem Matrixkalkül vorzuziehen ist, da keine Charakterenrechnungen angestellt werden[7]).

2. Es sei $\mathfrak{g}$ im folgenden stets eine endliche Gruppe, die von e Elementen erzeugt wird. Ist $\mathfrak{W}$ eine Gruppe und ω ein Homomorphismus von $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{g}$, so nennen wir das Paar $(\mathfrak{W}, \omega)$ eine $\mathfrak{g}$-*Erweiterung*. Wird durch ω eine Untergruppe von $\mathfrak{W}$ isomorph auf $\mathfrak{g}$ abgebildet, so sagen wir $(\mathfrak{W}, \omega)$ *zerfällt*. Wird durch ω eine echte Untergruppe von $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{g}$ abgebildet, so sagen wir $(\mathfrak{W}, \omega)$ *zerspaltet*. Diese Begriffe decken sich mit den in [4] definierten, wenn man für den dort betrachteten Normalteiler den Kern von ω setzt.

Ist der Kern $\mathfrak{w}$ von ω abelsch, so definieren wir gemäß

$$w + v = w\,v, \qquad W^{\omega}\,w = W\,w\,W^{-1}$$
$$w, v \in \mathfrak{w}, \qquad W \in \mathfrak{W}$$

[3]) $\Phi(\mathfrak{G})$ = Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

[4]) Herr Prof. H. WIELANDT machte mich schon früher in einem Gespräch auf die Existenz einer Gruppe mit den Eigenschaften von $\mathfrak{H}$ aufmerksam.

[5]) Siehe [9].

[6]) Bei geeigneter Induktion läßt sich nach G. FRATTINI jede Erweiterung auf diesen Fall zurückführen; s. z.B. [5].

[7]) Man ziehe herüber etwa [1], III, 2 oder [11], § 110 oder [4] zu Rate.

den (additiv verknüpften) *Kernmodul* von $(\mathfrak{W}, \omega)$ und bezeichnen ihn, da e
$(1 = 0$ gesetzt) dieselben Elemente wie $\mathfrak{w}$ enthält, ohne Mißverständnisse be
fürchten zu müssen, ebenfalls mit $\mathfrak{w}$. Er ist ein $\mathfrak{g}$-*Modul* in der Bezeichnungs
weise von [4]. Hat er Primzahlexponenten p, d.h. gilt $p\,w = 0$ für alle $w \in \mathfrak{w}$
so kann $\mathfrak{w}$ in Übereinstimmung mit [4] in natürlicher Weise als $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-*Modu*
aufgefaßt werden, $\Gamma^{(p)}$ Restklassenkörper der ganzen rationalen Zahle
modulo p. Alle Modulbegriffe wie Teilmodul, Homomorphismus, Isomor
phismus ($\cong$), direkte Summe ($\oplus$) usw. sollen, wenn nicht besonders ver
merkt, stets $\mathfrak{g}$ als Operatorenbereich zulassen.

Es ist nach Definition des Kernmoduls klar, daß der Verband der Normal
teiler von $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}$ als Untergruppe aufgefaßt, mit dem Verband der Teil
moduln von $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}$ als $\mathfrak{g}$-Modul aufgefaßt, verbandsisomorph ist.

Zu jedem $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{w}$ existiert eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit einem Kernmodul
der zu $\mathfrak{w}$ isomorph ist; z.B. die aus der Gruppe der Elemente (w, g) mit de
Verknüpfung

$$(w, g)\,(v, h) = (w + g\,v,\ g\,h)$$

$w, v \in \mathfrak{w}$; $g, h \in \mathfrak{g}$ und dem Homomorphismus $(w, g) \to g$ bestehende. Sie is
eine zerfallende $\mathfrak{g}$-Erweiterung.

Existiert für zwei $\mathfrak{g}$-Erweiterungen $(\mathfrak{W}, \omega)$, $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ ein Homomorphismu
(Isomorphismus) σ von $\mathfrak{W}$ auf $\hat{\mathfrak{W}}$ bei dem

$$W^{\hat{\omega}\sigma} = W^{\omega}, \qquad W \in \mathfrak{W} \tag{2.1}$$

gilt, so heiße σ ein *Homomorphismus* (*Isomorphismus*) von $(\mathfrak{W}, \omega)$ auf $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega}$
Die Isomorphismen von $\mathfrak{g}$-Erweiterungen sind klassenbildend.

Hilfssatz 1. Ein Homomorphismus (Isomorphismus) σ von $(\mathfrak{W}, \omega)$ au
$(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ induziert einen Homomorphismus (Isomorphismus) des Kernmoduls
von $(\mathfrak{W}, \omega)$ auf den Kernmodul $\hat{\mathfrak{w}}$ von $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$.

Beweis. Wir setzen $w^{\sigma} = \sigma\,w$ für $w \in \mathfrak{w}$. Dann gilt trivialerweise $\sigma(w + v) =$
$\sigma\,w + \sigma\,v$, $w, v \in \mathfrak{w}$ und

$$\sigma(W^{\omega}\,w) = \sigma(W\,w\,W^{-1}) = (W\,w\,W^{-1})^{\sigma} = W^{\sigma}\,w^{\sigma}\,W^{-\sigma} = W^{\hat{\omega}\sigma}(\sigma\,w);$$

nach (2.1) also $\sigma(W^{\omega}w) = W^{\omega}(\sigma\,w)$. Ist σ eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{W}$
so offenbar auch von $\mathfrak{w}$; w. z. b. w.

Man kann jedoch im allgemeinen nicht aus der Existenz eines Homo
morphismus (Isomorphismus) von einem Kernmodul auf einen anderen d
Existenz eines Homomorphismus (Isomorphismus) für die zugehörigen
Erweiterungen erschließen. Speziell gilt aber

Hilfssatz 2. Sind $\mathfrak{w}$ und $\hat{\mathfrak{w}}$ $\mathfrak{g}$-Moduln, σ ein Homomorphismus (Is
morphismus) von $\mathfrak{w}$ auf $\hat{\mathfrak{w}}$, $(\mathfrak{W}, \omega)$ und $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ zerfallende $\mathfrak{g}$-Erweiterungs
mit den Kernmoduln $\mathfrak{w}$ bzw. $\hat{\mathfrak{w}}$, so kann σ zu einem Homomorphismus (Is
morphismus) von $(\mathfrak{W}, \omega)$ auf $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ fortgesetzt werden.

Beweis. $R_{R^{\omega}}$ bzw. $\hat{R}_{\hat{R}^{\hat{\omega}}}$ seien die Elemente einer Gruppe, die durch
bzw. $\hat{\omega}$ isomorph auf $\mathfrak{g}$ abgebildet wird. $W \in \mathfrak{W}$ bzw. $\hat{W} \in \hat{\mathfrak{W}}$ ist dann ei
deutig darstellbar in der Form $W = w\,R_{W^{\omega}}$, $w \in \mathfrak{w}$ bzw. $\hat{W} = \hat{w}\,\hat{R}_{\hat{W}^{\hat{\omega}}}$, $\hat{w} \in$

Die gemäß $(w R_g)^\sigma = (\sigma w)\hat{R}_g$ erklärte Abbildung von $\mathfrak{W}$ ist ein Homomorphismus der verlangten Art; w. z. b. w.

Wir werden des öfteren Aussagen über die Erzeugendenzahlen von Gruppenerweiterungen machen. Das erleichtert der

Hilfssatz 3. Es sei $(\mathfrak{W}, \omega)$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung und der Kern $\mathfrak{w}$ nilpotent von endlicher Ordnung.

$\mathfrak{W}$ wird dann und nur dann von e Elementen erzeugt, wenn $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$ [8]) von e Elementen erzeugt wird. $\mathfrak{w}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$ ist abelsch und als Kernmodul von $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}), \omega)$ direkte Summe von einfachen $\mathfrak{g}$-Moduln. $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}), \omega)$ zerfällt.

Beweis. Nach bekannten Eigenschaften der Φ-Untergruppe folgt aus $E_1(\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})), \ldots, E_e(\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}))\} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$ [8]) sogar $\{E_1, \ldots, E_e\} = \mathfrak{W}$. Die weiteren Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus [5], Satz 7.

3. Eine Gruppe, die n freie Erzeugende besitzt, nennen wir kurz *n-frei*. $\mathfrak{F}$ sei e-frei und $(\mathfrak{F}, \varphi)$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung. Der Kern $\mathfrak{f}$ von $(\mathfrak{F}, \varphi)$ ist nach O. Schreier [9]) eine $[1-(e-1)(\mathfrak{g}:1)]$-freie Gruppe. Für eine Primzahl p sei $\mathfrak{f}_p$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{f}$ mit einer Faktorgruppe $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$, die abelsch und vom Exponenten p ist. $\mathfrak{f}_p$ ist Normalteiler von $\mathfrak{F}$. Die Bilder von $\mathfrak{F}, \mathfrak{f}, F \in \mathfrak{F}$ usw. bei dem natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}/\mathfrak{f}_p$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}^{(p)}, \mathfrak{f}^{(p)}, F^{(p)}$ usw. $(\mathfrak{F}, \varphi)$ ist dann ebenfalls $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit dem Kernmodul $\mathfrak{f}^{(p)}$, der den $\Gamma^{(p)}$-Rang $[1+(e-1)(\mathfrak{g}:1)]$ hat.

Satz 1. *Die $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ ist bis auf Isomorphismen nur von $\mathfrak{g}$, p und e, nicht von φ abhängig.*

Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 4. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, die von n Elementen erzeugt wird, $\mathfrak{A}$ kleinster abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

In jedem Erzeugendensystem $E_1\mathfrak{A}, \ldots, E_n\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ existiert ein Erzeugendensystem $\bar{E}_1 \subseteq E_1\mathfrak{A}, \ldots, \bar{E}_n \subseteq E_n\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{G}$.

Beweis. $D_1, \ldots, D_n$ sei ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{G}$. Jedes Elementsystem

$$\widetilde{E}_1 \in E_1\mathfrak{A}, \ldots, \widetilde{E}_n \in E_n\mathfrak{A} \tag{3.1}$$

erzeugt eine Gruppe $\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\}$ mit $\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{A}$ ist entweder $\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} = \mathfrak{G}$ oder

$$\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} \cap \mathfrak{A} = 1. \tag{3.2}$$

Im letzteren Falle wird $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n$ vermöge $\widetilde{D}_1 = \{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} \cap D_1\mathfrak{A}, \ldots, \widetilde{D}_n = \{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} \cap D_n\mathfrak{A}$ eineindeutig ein Elementsystem

$$\widetilde{D}_1 \in D_1\mathfrak{A}, \ldots, \widetilde{D}_n \in D_n\mathfrak{A} \tag{3.3}$$

mit

$$\{\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n\} \cap \mathfrak{A} = 1 \tag{3.4}$$

[8]) $\{\mathfrak{K}\}$ ist die von dem Komplex $\mathfrak{K}$ erzeugte Gruppe.
[9]) Siehe [10].

zugeordnet. Würde (3.2) für alle $(\mathfrak{A}:1)^n$ Elementsysteme (3.1) gelten, s würde auch (3.4) für alle $(\mathfrak{A}:1)^n$ Elementsysteme (3.3) gelten, im Widerspruc zur Definition von $D_1, \ldots, D_n$.

Hilfssatz 5. Es werde $\mathfrak{G}$ von n Elementen erzeugt. $\mathfrak{N}$ sei endliche auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

In jedem Erzeugendensystem $E_1\mathfrak{N}, \ldots, E_n\mathfrak{N}$ für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ existiert ein E zeugendensystem $\overline{E}_1 \in E_1\mathfrak{N}, \ldots, \overline{E}_n \in E_n\mathfrak{N}$ für $\mathfrak{G}$[10]).

Beweis. Der Satz ist zunächst richtig, wenn $\mathfrak{N}:1=1$ ist. Es sei dahe $\mathfrak{N}:1>1$ und der Satz bewiesen für auflösbare Normalteiler mit kleinere Ordnung als $\mathfrak{N}:1$. $\mathfrak{A}$ sei ein kleinster (notwendig abelscher) Normalteiler vo $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. Dann wird auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ von n Elementen erzeugt, und es ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ au lösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ mit einer Ordnung $<\mathfrak{N}:1$. Ist $E_i\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ Bil der Restklasse $E_i\mathfrak{N}$ bei dem natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ so erzeugen $E_1\mathfrak{N}/\mathfrak{A}, \ldots, E_n\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}/\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$. Nach der Induktions voraussetzung existieren daher Elemente $\overline{\overline{E}}_1\mathfrak{A} \in E_1\mathfrak{N}/\mathfrak{A}, \ldots, \overline{\overline{E}}_n\mathfrak{A} \in E_n\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$, d $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ erzeugen. Hieraus folgt nach Hilfssatz 3 die Existenz von Elemente

$$\overline{E}_1 \in \overline{\overline{E}}_1\mathfrak{A} < E_1\mathfrak{N}, \ldots, \overline{E}_n \in \overline{\overline{E}}_n\mathfrak{A} < E_n\mathfrak{N},$$

die $\mathfrak{G}$ erzeugen.

Beweis zu Satz 1. Es sei $\widehat{\mathfrak{F}}$ e-frei und $(\widehat{\mathfrak{F}}, \widehat{\varphi})$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung. W zeigen, daß die entsprechend $(\mathfrak{F}^{(\mathfrak{p})}, \varphi)$ gebildete $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\widehat{\mathfrak{F}}^{(\mathfrak{p})}, \widehat{\varphi})$ m $(\mathfrak{F}^{(\mathfrak{p})}, \varphi)$ isomorph ist.

$E_1, \ldots, E_e$ sei ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{F}$. $E_1^{\varphi}, \ldots, E_e^{\varphi}$ erzeugen dann Nach Hilfssatz 4 existieren Elemente

$$\widehat{E}_1^{(\mathfrak{p})}, \ldots, \widehat{E}_e^{(\mathfrak{p})} \in \widehat{\mathfrak{F}}^{(\mathfrak{p})}, \qquad \widehat{E}_i^{(\mathfrak{p})\,\widehat{\varphi}} = E_i^{\varphi} \tag{3.5}$$

die $\widehat{\mathfrak{F}}^{(\mathfrak{p})}$ erzeugen. Die Abbildungen $E_1 \to \widehat{E}_1^{(\mathfrak{p})}, \ldots, E_e \to \widehat{E}_e^{(\mathfrak{p})}$ definieren dahe einen Homomorphismus σ von $\mathfrak{F}$ auf $\widehat{\mathfrak{F}}^{(\mathfrak{p})}$, für den $F^{(\mathfrak{p})\,\widehat{\varphi}\,\sigma} = F^{(\mathfrak{p})\,\varphi}$, $F^{(\mathfrak{p})} \in \mathfrak{F}^{(}$ und speziell $\hat{\mathfrak{f}}^{(\mathfrak{p})\sigma^{-1}} = \mathfrak{f}$ gilt. Da $\mathfrak{f}_p$ einziger Normalteiler von $\mathfrak{f}$ ist, für den $\mathfrak{f}/$ direktes Produkt von $1+(e-1)$ $(\mathfrak{g}:1)$ zyklischen Gruppen der Ordnung ist, ist $\mathfrak{f}_p$ Kern von σ. Nach (2.1) sind daher $(\mathfrak{F}^{(\mathfrak{p})}, \varphi)$ und $(\widehat{\mathfrak{F}}^{(\mathfrak{p})}, \widehat{\varphi})$ isomorph w. z. b. w.

Den hiermit und nach Hilfssatz 1 bis auf Isomorphie nur von $\mathfrak{g}, p$ und abhängenden Kernmodul von $(\mathfrak{F}^{(\mathfrak{p})}, \varphi)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(\mathfrak{p})}$. Diese Be zeichnung hat dann und nur dann einen Sinn, wenn $\mathfrak{g}$ von e Elementen erzeug wird.

4. Wir klären jetzt, in welcher Weise die Struktur von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(\mathfrak{p})}$ von e abhäng Dazu verwenden wir das von K. REIDEMEISTER zuerst angegebene, vo O. SCHREIER[9]) verfeinerte Verfahren zur Bestimmung von Erzeugende systemen und Relationen für Untergruppen.

[10]) Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes aus der Zahlentheorie; siel H. HASSE, Zahlentheorie, Berlin 1949, S. 48. Wie man sich leicht am Beispiel der u endlichen zyklischen Gruppe klar macht, gilt er nicht für beliebige Normalteiler $\mathfrak{N}$. Diese Mangel ist es zuzuschreiben, daß Satz 1 nicht allgemeiner und unabhängig von p f $(\mathfrak{F}, \psi)$ bewiesen werden kann.

$\mathfrak{F}, \varphi$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie in **3**; desgleichen die daraus abgeleiteten Bezeichnungen. $E_1, \ldots, E_e$ sei ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{F}$,

$$R_g, \quad g \in \mathfrak{g}, \tag{4.1}$$

ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{F}$, das der Bedingung (Σ)[11]) genügt. Nach SCHREIER bilden dann die $1 + (e-1)(\mathfrak{g}:1)$ von 1 verschiedenen unter den Elementen

$$R_g E_i R_{(R_g E_i)\varphi}^{-1}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \quad i = 1, \ldots, e, \tag{4.2}$$

ein freies Erzeugendensystem für $\mathfrak{f}$.

$\tilde{\mathfrak{F}}$ sei $(e+1)$-frei und, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, von $E_1, \ldots, E_e, E_{e+1}$ erzeugt. φ sei der durch

$$E_i^{\tilde{\varphi}} = E_i^{\varphi}, \qquad i = 1, \ldots, e$$
$$E_{e+1}^{\tilde{\varphi}} = 1$$

erzeugte Homomorphismus von $\tilde{\mathfrak{F}}$ auf $\mathfrak{g}$. $\tilde{\mathfrak{f}}$ sei der Kern von $\tilde{\varphi}$. Die Elemente (4.1) bilden dann auch ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{g}$ in $\tilde{\mathfrak{F}}$, das der Bedingung (Σ)[11]) genügt. Es bilden daher die von 1 verschiedenen der Elemente (4.2) zusammen mit den Elementen

$$R_g E_{e+1} R_{(R_g E_{e+1})\tilde{\varphi}}^{-1} = R_g E R_g^{-1}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \tag{4.3}$$

ein freies Erzeugendensystem für $\tilde{\mathfrak{f}}$. Hieraus und aus dem für $\mathfrak{F}$ Festgestellten ergibt sich, daß die von 0 verschiedenen unter den Elementen

$$(R_g E_i R_{(R_g E_i)\varphi}^{-1})^{(p)}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \quad i = 1, \ldots, e$$

eine $\Gamma^{(p)}$-Basis für $\mathfrak{f}^{(p)}$ und diese und die Elementen

$$(R_g E_{e+1} R_g^{-1})^{(p)} = g E_{e+1}^{(p)}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \tag{4.4}$$

eine solche für $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)}$ bilden. Die Elemente (4.4) bilden eine Basis eines Teilmoduls von $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)}$, die bei $\mathfrak{g}$ regulär permutiert wird. Daher ist dieser Teilmodul isomorph zum regulären $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$[12]). $\mathfrak{f}^{(p)}$ ist ebenfalls Teilmodul von $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)}$. Also gilt $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)} \cong \mathfrak{f}^{(p)} \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$. Da nach Satz 1 $\mathfrak{f}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e+1}^{(p)}$ ist, erhalten wir somit

Satz 2. *Es ist* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e+1}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$.

5. Bei der weiteren Untersuchung von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ legen wir nach den Ergebnissen der vorangehenden Abschnitte eine spezielle Einbettung von $\mathfrak{g}$ zugrunde: $\mathfrak{F}$ sei $(\mathfrak{g}:1-1)$-frei und von den Elementen

$$E_g, g \in \mathfrak{g}, g \neq 1 \tag{5.1}$$

erzeugt. φ sei der durch $E_g \to g$ erzeugte Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{g}$. Die hieraus resultierenden Begriffe bezeichnen wir wieder wie in **3**. Die Elemente

[11]) Siehe [8], S. 69—80.
[12]) Siehe [4].

(5.1) und $E_1 = 1$ sind dann ein Repräsentantensystem, das der Bedingung (Σ)[11]) genügt. Daher bilden die von 1 verschiedenen Elemente der Form $E_g E_h E^{-1}_{(E_g E_h)^\varphi}$ ein freies Erzeugendensystem für $\mathfrak{f}$. Das sind die $(\mathfrak{g}:1-1)^2$ Elemente

$$E_g E_h E_{gh}^{-1}; \qquad g, h \in \mathfrak{g}; \qquad g, h \neq 1.$$

Wir setzen allgemein $c_{g,h} = (E_g E_h E_{gh}^{-1})^{(\mathfrak{p})}$; $g, h \in \mathfrak{g}$. Dabei ist

$$c_{g,h} = 0 \quad \text{für} \quad g = 1 \quad \text{oder} \quad h = 1.$$

$\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ wird dann von den Elementen $c_{g,h}$, $g, h \neq 1$ erzeugt. Wie man leicht bestätigt, gelten in $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ die folgenden Relationen:

$$(5.2) \qquad g\, c_{h,i} = c_{g,h} + c_{gh,i} - c_{g,hi}, \qquad g, h, i \in \mathfrak{g}.$$

$(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$[13]) werde von den unabhängigen Elementen c_g, $g \in \mathfrak{g}$, $g \neq 1$ erzeugt. Die Abbildung $c_{g,h} \to c_g + g\, c_h - c_{gh}$, $g, h \in \mathfrak{g}$, erzeugt einen Homomorphismus λ von $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ in $(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$, wie sich aus (5.2) ergibt. Wir zeigen, λ ist ein Isomorphismus und $(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} \lambda\, \mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})} \cong \Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$; dabei ist $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ der von den Elementen $c - g\, c$, $g \in \mathfrak{g}$, erzeugte Teilmodul von $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ und c erzeugendes Element von $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$. — Sei μ der durch die Abbildung $c_g \to c - g\, c$, $g \in \mathfrak{g}$, definierte Homomorphismus von $(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ in $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$. $\lambda\, \mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ liegt, (5.2) zufolge, im Kern von μ. $\mu[(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}]$ hat den $\Gamma^{(\mathfrak{p})}$-Rang $\mathfrak{g}:1-1$, da $c \notin \Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ und $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} = \Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} + \Gamma^{(\mathfrak{p})} c$. Ist f der $\Gamma^{(\mathfrak{p})}$-Rang von $\lambda\, \mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$, so gilt daher

$$f \leq (\mathfrak{g}:1-1)(\mathfrak{g}:1) - (\mathfrak{g}:1-1) = (\mathfrak{g}:1-1)^2.$$

Andererseits ist

$$(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} = \lambda\, \mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})} + \sum_{\substack{g \in \mathfrak{g} \\ g \neq 1}} \Gamma^{(\mathfrak{p})} c_g$$

also

$$(\mathfrak{g}:1-1)(\mathfrak{g}:1) \leq f + (\mathfrak{g}:1-1)$$

oder

$$(\mathfrak{g}:1-1)^2 \leq f.$$

Da $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ den $\Gamma^{(\mathfrak{p})}$-Rang $(\mathfrak{g}:1-1)^2$ hat, ist also λ ein Isomorphismus und $\lambda\, \mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ der Kern von μ.

Ist $\mathfrak{c}_1$ der einfache $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(\mathfrak{p})}$-Modul, in dem $\mathfrak{g}$ invariant operiert, so ist offenbar $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} / \Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} \cong \mathfrak{c}_1$.

Hieraus erhalten wir zunächst

Satz 3. $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}^{(\mathfrak{p})}$ *und* $[(\mathfrak{g}:1-2) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}] \oplus \mathfrak{c}_1$ *sind von gleicher Komposition*[14])

Durch Satz 2 und Satz 3 ist die Komposition für jedes $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(\mathfrak{p})}$ bestimmt, genauer, auf die der regulären Moduln $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ zurückgeführt.

[13]) $n \oplus \mathfrak{a}$ für einen $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{a}$ bedeute hier und im folgenden die n-fache direkte Summe $\underbrace{\mathfrak{a} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}}_{n}$.

[14]) Unter der *Komposition* einer Gruppe mit Kompositionsreihe verstehen wir die Zahlenmenge, die für alle Typen einfacher Gruppen angibt, wie oft diese in einer Kompositionsreihe der Gruppe als Kompositionsfaktor auftreten.

Für $p \nmid g:1$ ist wegen der Gültigkeit des Satzes von H. MASCHKE[15]) durch Satz 3 die Struktur von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ eindeutig bestimmt. Es gilt also

Satz 4. *Für* $p \nmid g:1$ *ist* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong [(e-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}] \oplus \mathfrak{e}_1$.

6. Bevor wir an eine Verfeinerung der Ergebnisse von **5** gehen, müssen wir einiges über $\mathfrak{g}$-Moduln zwischenschalten.

Mit $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir den Durchschnitt der maximalen Teilmoduln des $\mathfrak{g}$-Moduls $\mathfrak{a}$. Der Restklassenmodul $\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ ist dann direkte Summe von einfachen $\mathfrak{g}$-Moduln. Die Anzahl der darin auftretenden Summanden bezeichnen wir mit $r(\mathfrak{a})$. Man bestätigt leicht die folgenden Tatsachen: $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}) \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{b}/\mathfrak{r}(\mathfrak{b})$. Ist $\mathfrak{a}$ Teilmodul von $\mathfrak{b}$, so gilt $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) + \mathfrak{a})$.

$\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ besitzt nach bekannten Sätzen[16]) eine Darstellung

$$\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong (r_1 \oplus \mathfrak{d}_1) \oplus (r_2 \oplus \mathfrak{d}_2) \oplus \cdots \oplus (r_t \oplus \mathfrak{d}_t) \tag{6.1}$$

mit $\mathfrak{d}_i \ncong \mathfrak{d}_k$ für $i \neq k$, $\mathfrak{d}_i\,\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_i) = \mathfrak{c}_i$ einfach, $\mathfrak{c}_i \ncong \mathfrak{c}_k$ für $i \neq k$. Die $\mathfrak{c}_i$, $i = 1, \ldots, t$ repräsentieren alle Typen einfacher $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Moduln. $\mathfrak{c}_1$ sei wie vor Satz 3 definiert. Es ist $r_1 = 1$. Für $p \mid g:1$ ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) \neq 0$.

In [4] zeigten wir, daß für ein geeignetes n jeder $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul mit einem Restklassenmodul von $n \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ isomorph ist. Wir beweisen jetzt genauer

Hilfssatz 6. Zu jedem $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul $\mathfrak{a}$ existiert eine direkte Summe

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{d}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{i_{r(\mathfrak{a})}}$$

und ein Teilmodul $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{c}$ derart, daß $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{c}/\mathfrak{a}$ ist. Es ist dann $\mathfrak{c}/\mathfrak{r}(\mathfrak{c}) \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

Beweis. Wie schon vorher bemerkt ist $\mathfrak{a}$ jedenfalls isomorph einem Restklassenmodul $\mathfrak{c}^*/\tilde{\mathfrak{a}}$ einer direkten Summe $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{d}_{j_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{j_s}$. Da $r(\mathfrak{d}_i) = 1$ ist, ist $r(\mathfrak{c}^*) = s$ die Anzahl der darin auftretenden Summanden $\mathfrak{d}_j$. Ist $r(\mathfrak{c}^*) = r(\mathfrak{a})$, so ist der Satz also richtig. Sei $r(\mathfrak{c}^*) > r(\mathfrak{a})$ und der Satz bewiesen, für $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Moduln $\mathfrak{a}$, die Restklassenmoduln einer direkten Summe von $\mathfrak{d}_j$ mit weniger als $r(\mathfrak{c}^*)$ Summanden sind. Wir setzen

$$\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} = \mathfrak{d}_{j_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{j_{\nu-1}} \oplus \mathfrak{d}_{j_{\nu+1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{j_s}, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

Dann ist $\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} + \tilde{\mathfrak{a}} \neq \mathfrak{c}^*$ nicht für alle $\nu = 1, \ldots, s$, da $\mathfrak{d}_{j_\nu}$ nur einen maximalen Teilmodul enthält und zufolge $\mathfrak{c}^*/\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} \cong \mathfrak{d}_{j_\nu}$ anderenfalls $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \bigcap_\nu (\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} \oplus \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_{j_\nu})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{c}^*)$ und dann $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{c}^*)$ wäre. Sei daher $\bar{\mathfrak{d}}_{j_n} + \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}^*$. Nach den Isomorphiesätzen ist dann $\bar{\mathfrak{d}}_{j_n}/\bar{\mathfrak{d}}_{j_n} \cap \tilde{\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}$. Da $\bar{\mathfrak{d}}_{j_n}$ direkte Summe von $r(\mathfrak{c}^*) - 1$ Summanden ist, folgt die erste Behauptung des Satzes aus der Induktionsannahme. Die zweite Aussage ergibt sich unmittelbar aus dem im zweiten Absatz dieses Abschnittes Gesagten und $r(\mathfrak{d}_i) = 1$; w. z. b. w.

Ferner benötigen wir

Hilfssatz 7. Aus $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{a} \cong (m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}$.

[15]) Siehe [4].
[16]) Siehe [1], IX, 7.

Beweis. σ sei ein Isomorphismus von $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})})/\mathfrak{a}$ auf $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})})/\mathfrak{b}$. Nach dem gleichen Schlußschema wie beim Beweis des Hilfssatzes 5 läßt sich zunächst zeigen, daß in jedem Erzeugendensystem

$$c_1 + \mathfrak{a}, \ldots, c_m + \mathfrak{a}$$

und

$$d_1 + \mathfrak{b}, \ldots, d_m + \mathfrak{b}, \qquad \sigma(c_i + \mathfrak{a}) = d_i + \mathfrak{b},$$

für $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})})/\mathfrak{a}$ bzw. $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})})/\mathfrak{b}$ ein Erzeugendensystem

$$\bar{c}_1 \in c_1 + \mathfrak{a}, \ldots, \bar{c}_m \in c_m + \mathfrak{a}$$

bzw.

$$\bar{d}_1 \in d_1 + \mathfrak{b}, \ldots, \bar{d}_m \in d_m + \mathfrak{b}$$

für $m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ existiert. Aus $\Gamma^{(\mathfrak{p})}$-Rangabzählung ergibt sich, daß die $\bar{c}_i$, $i = 1, \ldots, m$ mit $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ isomorphe Teilmoduln erzeugen, deren Durchschnitte paarweise 0 ist. Gleiches gilt für $\bar{d}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Die Abbildungen $\bar{c}_i \to \bar{d}_i$ induzieren daher einen Automorphismus von $m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$. Nach Wahl der Erzeugenden wird hierbei $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ abgebildet; w. z. b. w.

7. Satz 5′. *Für* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{g} : 1$ *ist*

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}^{(\mathfrak{p})} \cong [(\mathfrak{g} : 1 - 1 - s_1) \oplus \mathfrak{d}_1] \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_2 - s_2) \oplus \mathfrak{d}_2] \oplus \cdots \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_t - s_t) \oplus \mathfrak{d}_t] \oplus \mathfrak{h}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)/\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)) \cong (s_1 \oplus \mathfrak{e}_1) \oplus \cdots \oplus (s_t \oplus \mathfrak{e}_t)$ *und* $\mathfrak{h}$ *ein beliebiger und stets existierender Teilmodul von* $\mathfrak{s} = (s_1 \oplus \mathfrak{d}_1) \oplus \cdots \oplus (s_t \oplus \mathfrak{d}_t)$ *mit* $\mathfrak{s}/\mathfrak{h} \cong \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)$.

$\mathfrak{h}$ *enthält keinen direkten Summanden* $\cong \mathfrak{d}_i$, $i = 1, \ldots, t$.

Beweis. Nach **5** und Hilfssatz 7 ist $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}^{(\mathfrak{p})}$ mit jedem Teilmodul von $(\mathfrak{g} : 1 - 1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ isomorph, dessen Restklassenmodul mit $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ isomorph ist. Da $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}/\Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} \cong \mathfrak{c}_1$ ist, muß nach Hilfssatz 7 $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} \cong \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) \oplus (r_2 \oplus \mathfrak{d}_2) \oplus \cdots \oplus (r_t \oplus \mathfrak{d}_t)$ sein. Auf Grund der im zweiten Absatz von **6** gemachten Bemerkungen sind also die Zahlen $(\mathfrak{g} : 1 - 1 - s_1)$, $(\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_2 - s_2, \ldots, (\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_t - s_t \geq 0$. Nach Hilfssatz 6 ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)$ isomorph mit einem Restklassenmodul $\mathfrak{s}/\mathfrak{h}$. Daher ist $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})} \cong (\mathfrak{g} : 1 - 1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{f}^*$,

$$\mathfrak{f}^* \cong [(\mathfrak{g} : 1 - 1 - s_1) \oplus \mathfrak{d}_1] \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_2 - s_2) \oplus \mathfrak{d}_2] \oplus \cdots \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_t - s_t) \oplus \mathfrak{d}_t] \oplus \mathfrak{h}.$$

Nach Hilfssatz 7 hat also $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}^{(\mathfrak{p})}$ die im Satz angegebene Struktur.

Wäre $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{d} \oplus \bar{\mathfrak{d}}$, $\mathfrak{d} \simeq \mathfrak{d}_k$, so wäre $\mathfrak{d}$ auch direkter Summand von $\mathfrak{s}$. Denn mit $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ sind nach [4] Satz 2 auch die direkten Summanden von $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{p})}$ $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(\mathfrak{p})}$-m-Moduln, und diese definitionsgemäß direkte Summanden eines jeden $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(\mathfrak{p})}$-Moduls, der sie enthält. Nach dem Satz von W. KRULL[17]) wäre also $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)$ schon Restklassenmodul einer direkten Summe von $\mathfrak{d}_i$, die weniger Summanden enthält als $\mathfrak{s}$, was auf Grund von $r(\mathfrak{s}) = r(\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1))$ nicht sein kann; w. z. b. w.

[17]) [6], Fundamentalsatz.

Mit Satz 2 folgt aus Satz 5′ allgemeiner

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong [(e-s_1)\oplus \mathfrak{d}_1]\oplus[((e-1)\,r_2-s_2)\oplus \mathfrak{d}_2]\oplus\cdots\oplus[((e-1)\,r_t-s_t)\oplus \mathfrak{d}_t]\oplus \mathfrak{h}.$$

Die hierin auftretenden Summandenanzahlen sind alle $\geqq 0$. Setzen wir

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong [(e-s_1)\oplus \mathfrak{d}_1]\oplus[((e-1)\,r_2-s_2)\oplus \mathfrak{d}_2]\oplus\cdots\oplus[((e-1)\,r_t-s_t)\oplus \mathfrak{d}_t]$$

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \begin{cases} \mathfrak{h} & \text{für } p \mid \mathfrak{g}:1 \\ 0 & \text{für } p \nmid \mathfrak{g}:1, \end{cases}$$

so erhalten wir also aus Satz 4 (unter Beachtung des Satzes von Maschke und, dementsprechend, $s_i = 0$, $i = 1, \ldots, t$, für $p \nmid \mathfrak{g}:1$) und Satz 5′

Satz 5. $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong \mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$, *p beliebig.* $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ *enthält keinen direkten Summanden* $\cong \mathfrak{d}_i$, $i = 1, \ldots, t$.

Ohne Beweis bemerken wir, daß die Zahlen $s_1, \ldots, s_t$ auch die folgende Darstellung gestatten:

$$s_i = \frac{z_i}{k_i}.$$

Dabei ist z_i die Anzahl der verschränkten Homomorphismen[18]) von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{e}_i$ und k_i die Anzahl der Elemente des Automorphismenkörpers von $\mathfrak{e}_i$.

8. Es soll für $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ noch eine andere Charakterisierung angegeben werden.

$(\mathfrak{M}, \mu)$ sei eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit folgenden Eigenschaften

m_1) $\mathfrak{M}$ wird von e Elementen erzeugt,

m_2) $(\mathfrak{M}, \mu)$ zerfällt,

m_3) der Kern von μ ist abelsch vom Exponenten p,

m_4) $\mathfrak{M}$ ist möglichst groß.

$(\mathfrak{H}, \eta)$ sei eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit folgenden Eigenschaften

h_1) $(\mathfrak{H}, \eta)$ zerspaltet nicht,

h_2) der Kern von η ist abelsch vom Exponenten p,

h_3) $\mathfrak{H}$ ist möglichst groß.

$\mathfrak{H}$ wird dann von e Elementen erzeugt, wie Hilfssatz 3 lehrt.

$\mathfrak{F}$ mit den Erzeugenden $E_1, \ldots, E_e$ und φ mögen die gleiche Bedeutung wie in 3 haben. Nach Hilfssatz 5 existieren

$$M_1, \ldots, M_e \in \mathfrak{M}, \qquad H_1, \ldots, H_e \in \mathfrak{H}$$

mit

$$M_i^{\mu} = H_i^{\eta} = E_i^{(p)\varphi}, \qquad i = 1, \ldots, e.$$

Die Abbildungen $E_i^{(p)} \to M_i$ bzw. $E_i^{(p)} \to H_i$ erzeugen dann einen Homomorphismus σ bzw. τ von $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ auf $(\mathfrak{M}, \mu)$ bzw. $(\mathfrak{H}, \eta)$. Es sei $\overline{\mathfrak{h}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{m}}$ der Kern von σ bzw. τ. $(\mathfrak{M}, \mu)$ bzw. $(\mathfrak{H}, \eta)$ ist dann mit der $\mathfrak{g}$-Erweiterung $\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ bzw. $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{m}}, \varphi)$ isomorph.

[18]) [3], I, 3; dort auch „*cocycle*" genannt.

Satz 6. *Es ist*

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong \overline{\mathfrak{m}} \oplus \overline{\mathfrak{h}} \tag{8.1}$$

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong \overline{\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \overline{\mathfrak{h}}. \tag{8.2}$$

Der Kernmodul von $(\mathfrak{M}, \mu)$ *bzw.* $(\mathfrak{H}, \eta)$ *ist also mit* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ *bzw.* $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ *isomorph*

Beweis. Es ist $\overline{\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{f}^{(p)}$, denn die $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\mathfrak{F}^{(p)}/\{\overline{\mathfrak{m}}, \overline{\mathfrak{h}}\}, \varphi)$ muß nach Wahl von $(\mathfrak{M}, \mu)$ und $(\mathfrak{H}, \eta)$ gleichzeitig zerfallend und nicht zerspaltend sein.

Es ist $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}} = 1^{(p)}$: Sei $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}} \neq 1^{(p)}$ und $\mathfrak{n}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{F}^{(p)}$ in $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}}$. Dem Zerfallen von $(\mathfrak{F}^{(p)}, \overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ entsprechend werde $\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}$ durch φ isomorph auf $\mathfrak{g}$ abgebildet. Wäre $\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\mathfrak{n}$ eine Untergruppe von $\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\mathfrak{n}$ und

$$\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\mathfrak{n} = (\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{n})\,(\overline{\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}}/\mathfrak{n}), \qquad \overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{n} \cap \overline{\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}}/\mathfrak{n} = \mathfrak{n}, \tag{8.3}$$

so wäre $(\mathfrak{F}^{(p)}/\mathfrak{f}^{(p)} \cap \overline{\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}}, \varphi)$ zerfallend und $\mathfrak{F}^{(p)}, \mathfrak{f}^{(p)} \cap \overline{\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}}$ größer als $\mathfrak{M}$. Bestünde (8.3) für kein $\overline{\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}}$, so wäre $(\mathfrak{F}^{(p)}, \mathfrak{n}, \varphi)$ nicht zerspaltend und $\overline{\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}}, \mathfrak{n}$ größer als $\mathfrak{H}$. In jedem Falle folgt aus $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}} \neq 1^{(p)}$ ein Widerspruch.

Da $\mathfrak{f}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$, ist hiermit (8.1) bewiesen.

Mit $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ ist auch $(\mathfrak{F}^{(p)}/\mathfrak{r}(\mathfrak{f}^{(p)}, \overline{\mathfrak{h}}), \varphi)$ zerfallend. Ist $\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{r}(\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}})/\overline{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{e}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{e}_{i_s}$, so wird nach Hilfssatz 3 auch die zerfallende $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit dem Kernmodul $\mathfrak{d}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{i_s}$ von e Elementen erzeugt. Dieser ist nach Hilfssatz 6 zufolge größter $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{e}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{e}_{i_s}$. Daher ist $\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}} \cong \overline{\mathfrak{m}}$ direkte Summe von $\mathfrak{d}_i$.

$\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{m}} \cong \overline{\mathfrak{h}}$ enthält keinen direkten Summanden $\cong \mathfrak{d}_i$: Wäre $\mathfrak{f}^{(p)}, \overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{d}/\overline{\mathfrak{m}} \oplus \overline{\mathfrak{d}}/\overline{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{d}/\overline{\mathfrak{m}} \cong \mathfrak{d}_i$, so wäre $(\mathfrak{F}^{(p)}, \overline{\mathfrak{d}}, \varphi)$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit einem Kernmodul $\cong \mathfrak{d}_i$. $\mathfrak{d}_i$ ist nach [4] Satz 2 $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-m-Modul; daher wäre nach [4] Satz 7 $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{d}}, \varphi)$ zerfallend, was dem Nichtzerspalten von $(\mathfrak{F}^{(p)}, \overline{\mathfrak{m}}, \varphi)$ widerspräche.

Aus Satz 5 und den letzten beiden Absätzen folgt wegen der Gültigkeit des Satzes von W. KRULL[17] $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und $\overline{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ sein; w. z. b. w.

Da $\overline{\mathfrak{m}}$ unabhängig von $\overline{\mathfrak{h}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}}$ bestimmt wurde und $(\mathfrak{F}^{(p)}, \overline{\mathfrak{m}}, \varphi)$ und $(\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ isomorphe $\mathfrak{g}$-Erweiterungen sind, erhalten wir aus dem Beweis zu Satz 6 noch als Nebenresultat

Satz 7. $(\mathfrak{H}, \eta)$ *ist durch* h_1, h_2, h_3 *bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt*

Jede $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\mathfrak{W}, \omega)$ mit Kern $\mathfrak{w}$ vom Exponenten p enthält offenbar eine Untergruppe $\mathfrak{U}$, so daß $(\mathfrak{U}, \omega)$ nicht zerspaltet. Es läßt sich nun leicht einsehen, daß es dann stets einen Homomorphismus von $(\mathfrak{H}, \eta)$ auf $(\mathfrak{U}, \omega)$ gibt. — Da die Struktur von $(\mathfrak{U}, \omega)$ und die Einbettung des Kernes von $(\mathfrak{U}, \omega)$ in $\mathfrak{w}$ die Erweiterung $(\mathfrak{W}, \omega)$ vollständig bestimmen, nennen wir $(\mathfrak{H}, \eta)$ die $\mathfrak{g}$-Haupterweiterung zum Exponenten p.

Über ihre Ordnung gilt

Satz 8. *Für* $p \mid \mathfrak{g}:1$ *läßt der* $\Gamma^{(p)}$*-Rang von* $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ *durch die Ordnung einer* p*-Sylowgruppe von* $\mathfrak{g}$ *geteilt den Rest* 1.

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 5 und einem Satz von L. E. Dickson[19]). Letzterer besagt, daß der $\Gamma^{(p)}$-Rang von $\mathfrak{d}_i$, $i=1,\ldots,t$ für $p\,|\,\mathfrak{g}:1$ durch die Ordnung einer p Sylowgruppe von $\mathfrak{g}$ teilbar ist.

9. Beispiel. $\mathfrak{g}$ sei die nichtabelsche Gruppe der Ordnung 6.

$p\nmid\mathfrak{g}:1$: Nach Satz 4 ist

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},2}^{(p)} \cong \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} \oplus \mathfrak{e}_1 \cong \mathfrak{m}_{\mathfrak{g},2}^{(p)}$$

$p=2$: $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus (2 \oplus \mathfrak{d}_2)$, $\mathfrak{d}_1$ einreihig, $\mathfrak{d}_1 > \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) > 0$, $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) \cong \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{e}_2$ einfach. Daher ist nach Satz 5

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},2}^{(p)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus (2 \oplus \mathfrak{d}_2) \oplus \mathfrak{e}_1$$
$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},2}^{(2)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus (2 \oplus \mathfrak{d}_2)$$
$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(2)} \cong \mathfrak{e}_1.$$

$p=3$: $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(3)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus \mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ einreihig,

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_1^0 > \mathfrak{d}_1^1 > \mathfrak{d}_1^2 > \mathfrak{d}_1^3 = 0$$
$$\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_2^0 > \mathfrak{d}_2^1 > \mathfrak{d}_2^2 > \mathfrak{d}_2^3 = 0$$
$$\mathfrak{d}_1^0/\mathfrak{d}_1^1 \cong \mathfrak{d}_1^2/\mathfrak{d}_1^3 \cong \mathfrak{d}_2^1/\mathfrak{d}_2^2 \cong \mathfrak{e}_1$$
$$\mathfrak{d}_2^0/\mathfrak{d}_2^1 \cong \mathfrak{d}_2^2/\mathfrak{d}_2^3 \cong \mathfrak{d}_1^1/\mathfrak{d}_1^2 \cong \mathfrak{e}_2.$$

Daher ist nach Satz 5

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},2}^{(3)} \cong (2 \oplus \mathfrak{d}_1) \oplus \mathfrak{e}_2$$
$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},2}^{(3)} \cong (2 \oplus \mathfrak{d}_1)$$
$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(3)} \cong \mathfrak{e}_2.$$

In ähnlicher Weise lassen sich leicht die $\mathfrak{g}$ und p behandeln, für die die unzerlegbaren $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Moduln einreihig sind; näheres über diese in [7].

Es folgen Anwendungen, die Aussagen über die Erzeugendenzahlen von Gruppenerweiterungen machen.

Satz 9. *$(\mathfrak{W},\omega)$ sei eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung, deren Kern $\mathfrak{w}$ eine endliche p-Gruppe ist.*

Ist gemäß Hilfssatz 3

$$\mathfrak{w}^* = \mathfrak{w}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}) \cong (i_1 \oplus \mathfrak{e}_1) \oplus \cdots \oplus (i_t \oplus \mathfrak{e}_t),$$

so wird $\mathfrak{W}$ dann und nur dann von e Elementen erzeugt, wenn

$$i_1 \leq e - s_1, \qquad i_2 \leq (e-1)\,r_2 - s_2, \ldots, i_t \leq (e-1)\,r_t - s_t \tag{9.1}$$

ist.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 genügt es, einzusehen, daß dann und nur dann $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$ von e Elementen erzeugt wird.

Wird $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$ von e Elementen erzeugt, so existiert in der Bezeichnungsweise von 8 ein Homomorphismus von $(\mathfrak{M},\mu)$ auf $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}),\omega)$. Nach Hilfssatz 1 und Satz 6 wird hierdurch ein Homomorphismus von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ auf $\mathfrak{w}^*$ induziert. Das ist nach Definition von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und Satz 6 nur möglich, wenn die Ungleichungen (9.1) bestehen.

[19]) Siehe [2].

Ist umgekehrt (9.1) erfüllt, so existiert ein Homomorphismus von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}^{(p}$ auf $\mathfrak{w}^*$, der nach Satz 6 und Hilfssatz 2 zu einem Homomorphismus von $(\mathfrak{M}, \mu)$ auf $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w} \cap \Phi(\mathfrak{W}), \omega)$ fortgesetzt werden kann. $\mathfrak{W}/\mathfrak{w} \cap \Phi(\mathfrak{W})$ ist also mit einer Faktorgruppe der von e Elementen erzeugbaren Gruppe $\mathfrak{M}$ isomorph; w. z. b. w.

Satz 10. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *abelsch und* $(\mathfrak{W}, \omega)$ *eine* $\mathfrak{g}$*-Erweiterung, deren Kern endliche* p*-Gruppe ist,* $p \nmid \mathfrak{g}:1$.

$\mathfrak{W}$ *wird dann und nur dann von* e *Elementen erzeugt, wenn in der Bezeichnungsweise von Satz* 9

$$e \geq i_1, \qquad e \geq i_2 + 1, \ldots, e \geq i_t + 1$$

ist.

Beweis. Da für abelsches $\mathfrak{g}$ jede absolut irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ genau einmal in der regulären Darstellung auftritt und für $p \nmid \mathfrak{g}:1$ der Satz von MASCHKE gilt, ist $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \mathfrak{e}_1 \oplus \mathfrak{e}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{e}_t$.

Alles weitere folgt aus Satz 9; w. z. b. w.

Die Sätze 9 und 10 lassen sich sinngemäß auf $\mathfrak{g}$-Erweiterungen mit nilpotentem Kern verallgemeinern.

Im nächsten Satz sei allgemein $e_{\mathfrak{G}}$ die minimale Erzeugendenzahl der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Satz 11. *Es sei* $\mathfrak{W}$ *eine endliche Gruppe und*

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{w}_0 > \mathfrak{w}_1 > \cdots > \mathfrak{w}_{r-1} > \mathfrak{w}_r = 1 \tag{9.2}$$

eine Normalreihe, $\mathfrak{w}_i$ *in* $\mathfrak{w}_{i-1}$ *maximaler und auflösbarer Normalteiler von* $\mathfrak{W}$ *für* $i = 2, \ldots, r$; $(\mathfrak{w}_{i-1}:\mathfrak{w}_i,\ \mathfrak{w}_{k-1}:\mathfrak{w}_k) = 1$ *für* $i, k = 1, \ldots, r$, $i \neq k$.

Ist $e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1} \neq 1$, *so ist* $e_{\mathfrak{W}} = e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1}$. *Ist* $e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1} = 1$, *so ist* $e_{\mathfrak{W}} = 1$ *oder* 2.

Beweis. Trivialerweise gilt $e_{\mathfrak{W}} \geq e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1}$.

Der Satz ist richtig für $r = 1$. Sei $r > 1$ und der Satz für Gruppen mit (9.2) entsprechender Normalreihe einer Länge $< r$ bewiesen. Dann gilt er für $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_{r-1}$. Wir setzen $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_{r-1} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{w}_{r-1}:1 = p$, p Primzahl, und betrachten $\mathfrak{W}$ mit dem natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_{r-1}$ als $\mathfrak{g}$-Erweiterung. Da $\mathfrak{w}_{r-1}$ abelsch ist folgt alles weitere aus Satz 10, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{w}_{r-1}$ als Kernmodul einfach ist.

Literatur.

[1] ARTIN, E., C. J. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with minimum condition. Ann Arbor 1948. — [2] DICKSON, L. E.: Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 389—398 (1907). — [3] EILENBERG, S., and S. MACLANE: Ann. of Math. (II) **48**, 51—78 (1947). — [4] GASCHÜTZ, W.: Math. Z. **56**, 376—387 (1952). — [5] GASCHÜTZ, W.: Math. Z. **58**, 160—17 (1953). — [6] KRULL, W.: Math. Z. **23**, 151—196 (1925). — [7] MORITA, K.: Sci. Rep Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A **4**, 177—194 (1951). — [8] REIDEMEISTER, K.: Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig 1932. — [9] SCHREIER, O Mh. Math. u. Phys. **34**, 165—180 (1926). — [10] SCHREIER, O.: Abh. math. Semina Hamburg **5**, 161—183 (1927). — [11] SCHUMANN, H. G.: Math. Ann. **114**, 385—41 (1937). — [12] WAERDEN, B. L. v. D.: Moderne Algebra, 2. Aufl., Bd. II. 1940.

Kiel, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 12. März 1954.)

Stoll, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 287—304 (1954)

Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen.

Von

Wilhelm Stoll.

§ 1. Einleitung.

Eine Teilmenge $\mathfrak{R}$ einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}^n$ der (komplexen) Dimension n heißt *analytisch*[1]), wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{H}^n$ eine offene Umgebung $\mathfrak{U}$ und eine Menge $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{U}$ analytischer Funktionen f gibt, deren gemeinsame Nullstellen $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \{P \mid f(P) = 0\}$ ergeben. Ist eine analytische Menge $\mathfrak{R} \neq \varnothing$ die Vereinigung $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ zweier analytischer Mengen $\mathfrak{R}_1 \not\supseteq \mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_2 \not\supseteq \mathfrak{R}_1$ so ist $\mathfrak{R}$ *reduzibel*, andernfalls *irreduzibel*. Eine analytische, Menge $\mathfrak{R} \neq \varnothing$ ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler irreduzibler analytischer Mengen $\mathfrak{R}_\lambda$ mit $\mathfrak{R}_\mu \not\supseteq \mathfrak{R}_\lambda$ für $\mu \neq \lambda$. Diese „irreduziblen Teile" von $\mathfrak{R}$ sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. In jeden kompakten Teil von $\mathfrak{H}^n$ dringen nur endlich viele irreduzible Teile von $\mathfrak{R}$ ein.

Um die *Dimension*[1]) von $\mathfrak{R}$ in einem Punkt $P_0 \in \mathfrak{R}$ zu definieren, wählt man eine Abbildung $\zeta(P)$, die eine offene Umgebung $\mathfrak{U}$ von P_0 auf eine offene Menge $\mathfrak{U}'$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ pseudokonform abbildet. Die Menge der analytischen Ebenen $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{R}^n$, für die $\zeta(P_0)$ isolierter Punkt von $\mathfrak{E} \cap \zeta(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U})$ ist, sei $\mathfrak{D}$, wobei ein Punkt als nulldimensionale analytische Ebene aufgefaßt werde. Mit $\dim \mathfrak{E}$ werde die Hälfte der topologischen Dimension von $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Dann hängt die Zahl $p = n - \operatorname{Max}_{\mathfrak{E} \in \mathfrak{D}} \dim \mathfrak{E}$ nicht von der Wahl von $\mathfrak{U}$ und $\zeta(P)$ ab. Sie heißt die Dimension von $\mathfrak{R}$ in P_0 und werde mit $p = \dim_{P_0} \mathfrak{R}$ bezeichnet. Für $P_0 \in \mathfrak{H}^n - \mathfrak{R}$ ist $\dim_{P_0} \mathfrak{R} = -1$. Die Dimension von $\mathfrak{R}$ ist $\dim \mathfrak{R} = \operatorname{Max}_{P \in \mathfrak{H}^n} \dim_P \mathfrak{R}$. Gilt $\dim \mathfrak{R} = \dim_P \mathfrak{R}$ für alle Punkte $P \in \mathfrak{R}$, so heißt $\mathfrak{R}$ *rein-dimensional*. Eine irreduzible analytische Menge ist rein-dimensional. Sind $\mathfrak{R}_\lambda$ die irreduziblen Teile von $\mathfrak{R}$, so ist $\dim \mathfrak{R} = \operatorname{Max}_{\lambda = 1, 2, \ldots} \dim \mathfrak{R}_\lambda$.

Der Punkt $P_0 \in \mathfrak{R}$ heißt *gewöhnlicher* Punkt[1]) der analytischen Menge $\mathfrak{R}$, wenn eine Abbildung $\zeta(P)$ eine offene Menge $\mathfrak{U}$ von P_0 pseudokonform so auf eine offene Menge $\mathfrak{V}$ des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{R}^n$ abbildet, daß dabei $\mathfrak{R}$ in den Teil $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{V} = \zeta(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U})$ einer analytischen Ebene $\mathfrak{E}$ übergeht. Mit $\mathfrak{R}^*$ werde die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{R}_\lambda$

[1]) Zum Begriff der analytischen Menge vergleiche man Kneser [6], Remmert und Stein [12] und Hermes [4].

ein irreduzibler Teil der Dimension p_λ von $\mathfrak{R}$, so sind $\mathfrak{R}_\lambda^*$ und $\mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}^*$ zusammenhängende, komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension p_λ. Es gilt

$$\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}^*}, \qquad \mathfrak{R}_\lambda = \overline{\mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}^*}, \tag{1.1}$$

$$\mathfrak{R}_\lambda^* \supseteq \mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}^* = \varnothing \quad \text{für} \quad \lambda \neq \mu. \tag{1.2}$$

Die Reste $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{R}_\lambda - \mathfrak{R}^*$ sind analytische Mengen mit

$$\dim_P(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}^*) < \dim_P \mathfrak{R} \quad \text{für} \quad P \in \mathfrak{R}, \tag{1.3}$$

$$\dim_P(\mathfrak{R}_\lambda - \mathfrak{R}) < \dim_P \mathfrak{R}_\lambda \quad \text{für} \quad P \in \mathfrak{R}_\lambda. \tag{1.4}$$

Eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{R}$ heiße auch eine *analytische Fläche*. Dann und nur dann ist $\mathfrak{R}$ eine analytische Fläche, wenn es eine Menge $\mathfrak{F}$ analytischer Funktionen gibt, für die gilt:

a) Jeder Funktion $f \in \mathfrak{F}$ ist eindeutig ein Gebiet $\mathfrak{U}_f \subseteq \mathfrak{H}^n$ zugeordnet.

b) In $\mathfrak{U}_f$ ist f analytisch und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}_f = \{P \mid f(P) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f.

c) Sind $f_1 \in \mathfrak{F}$ und $f_2 \in \mathfrak{F}$, so ist $f_1 f_2^{-1}$ in $\mathfrak{U}_{f_1} \cap \mathfrak{U}_{f_2}$ analytisch.

d) Es ist $\mathfrak{H}^n = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} \mathfrak{U}_f$.

Die Menge $\mathfrak{F}$ ist eine *Cousin-Verteilung* II. Art.

Die *Vielfachheit*[2]) der Nullstelle $\nu(P)$ der Funktion f im Punkt P ist unabhängig von $f \in \mathfrak{F}$ und heiße die Vielfachheit von $\mathfrak{R}$. Einer analytischen Fläche $\mathfrak{R}$ können verschiedene Funktionen $\nu(P)$ als Vielfachheit zugeordnet werden. Es gibt aber genau eine „natürliche" Vielfachheit $\nu(P, \mathfrak{R})$, die in jedem gewöhnlichen Punkt $P \in \mathfrak{R}$ den Wert $\nu(P, \mathfrak{R}) = 1$ hat. Wird jedem irreduziblen Teil $\mathfrak{R}_\lambda$ von $\mathfrak{R}$ eine natürliche Zahl p_λ zugeordnet $(\lambda = 1, \ldots, \Lambda \leq \infty)$, so ist $\nu(P) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} p_\lambda \nu(P, \mathfrak{R}_\lambda)$ eine mögliche Wahl der Vielfachheit von $\mathfrak{R}$, und auf diese Weise erhält man auch jede mögliche Wahl.

Ist $\mathfrak{R}$ eine analytische Menge in der offenen Teilmenge $\mathfrak{G} < \mathfrak{H}^n$ und gibt es eine analytische Menge $\mathfrak{R}_1$ aus $\mathfrak{H}^n$ mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{R}_1$, so heiße $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}^n$ *fortsetzbar*. Man kann $\mathfrak{R}_1$ minimal wählen, da der Durchschnitt analytischer Mengen analytisch ist. Durch diese Minimalforderung ist $\mathfrak{R}_1$ eindeutig bestimmt und heiße die *Fortsetzung* von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}^n$. Eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{G}$ heiße in einem Punkt $P \in \mathfrak{H}^n$ *regulär*, wenn sich $\mathfrak{R}$ in eine offene Menge $\mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}$ mit $P \in \mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{H}^n$ fortsetzen läßt.

Nun kann man die folgende Frage stellen:

Die offene Menge $\mathfrak{G}$ der n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ unterscheide sich von $\mathfrak{H}$ nur um die analytische Menge $\mathfrak{S} = \mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ mit $\dim \mathfrak{S} = q < n$. Unter welchen Bedingungen läßt sich eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ fortsetzen?

Zwei Kriterien werden von REMMERT und STEIN [*12*] aufgestellt:

1. *Ist $\dim_P \mathfrak{R} > q$ für jeden Punkt $P \in \mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}$ fortsetzbar.*

[2]) Zur Definition der Vielfachheit vergleiche man STOLL [*15*] S. 144.

2. *Ist $\mathfrak{R}$ rein q-dimensional und in wenigstens einem Punkt eines jeden irreduziblen Teils von $\mathfrak{S}$ regulär, so ist $\mathfrak{R}$ fortsetzbar.*

Für analytische Flächen wurden diese Kriterien bereits früher von THULLEN [17] bewiesen und werden hier mit THULLEN 1 bzw. THULLEN 2 bezeichnet.

In § 2 wird nun für analytische Flächen bewiesen:

I. *Dann und nur dann läßt sich eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$, der die Vielfachheit $\nu(P)$ zugeordnet sei, in $\mathfrak{H}$ fortsetzen, wenn es ein stetiges alternierendes Differential*[3])

$$(1.5)\quad \begin{cases} \chi(P) = \binom{i}{2}^{n-2} \left\{ \sum\limits_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, d\bar{z}_\mu\, dz_\nu\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\overset{\vee}{\ldots}} \ldots \overset{\nu}{\overset{\vee}{\ldots}} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n + \right. \\ \qquad \left. + \sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}(P)\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\overset{\vee}{\ldots}} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n \right\} \end{cases}$$

gibt, so daß für jeden Punkt $P \in \mathfrak{H}$ durch $\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, x_\mu \bar{x}_\nu$ eine positiv definite Hermitesche Form gegeben wird, und daß für jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{K} < \mathfrak{H}$ das Integral $\int\limits_{\mathfrak{K}\cap\mathfrak{R}} \nu(P)\, \chi$ existiert[4]).

Ob und inwieweit ein analoges Kriterium für rein p-dimensionale analytische Mengen mit $0 < p < n-1$ gilt, bleibt ungeklärt.

Im Falle, daß $\mathfrak{G}$ der euklidische Vektorraum $\mathfrak{R}^n$ und $\mathfrak{H}$ der projektiv abgeschlossene Raum $\mathfrak{P}^n$ ist, heiße eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}^n$ *algebraisch*, wenn es endlich viele Polynome $p_\varrho(\mathfrak{z})$ gibt, $\varrho = 1, \ldots, r$, deren gemeinsame Nullstellen $\mathfrak{R} = \bigcap\limits_{\varrho=1}^{r} \{\mathfrak{z} \mid p_\varrho(\mathfrak{z}) = 0\}$ ergeben. Eine analytische Fläche $\mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{R}^n$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ ist dann und nur dann algebraisch, wenn es ein Polynom $p(\mathfrak{z})$ gibt, das auf $\mathfrak{R}$ und nur auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, und zwar mit der gegebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Der Grad von $p(\mathfrak{z})$ heiße die *Ordnung* von $\mathfrak{R}$. Ein Kriterium zur obigen Frage gibt CHOW [3]:

3. *Eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ ist dann und nur dann in den projektiv abgeschlossenen Raum $\mathfrak{P}^n$ fortsetzbar, wenn $\mathfrak{R}$ algebraisch ist*[5]).

Für analytische Flächen wurde dieses Kriterium bereits von THULLEN [17] aufgestellt und werde mit THULLEN 3 bezeichnet. Ein anderes Kriterium gibt RUTISHAUSER [14]:

4. *Eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ ist dann und nur dann algebraisch, wenn $\mathfrak{R} \cap \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}| \leqq r\}$ einen euklidischen Oberflächeninhalt $V(r) = \underset{r\to\infty}{0}(r^{2n-2})$ hat.*

---

[3]) Da in dieser Arbeit nur alternierende Differentiale auftreten, wird für deren Produkt kein besonderes Zeichen eingeführt; statt $dz \wedge dw$ wird also $dz\, dw$ geschrieben. Das Zeichen $\overset{\mu}{\overset{\vee}{\ldots}}$ bedeutet das Fehlen des Faktors $dz_\mu\, d\bar{z}_\mu$.

[4]) Man vgl. Satz 4.

[5]) Man vgl. auch H. KNESER [6], REMMERT und STEIN [12] und CARTAN [2].

In § 3 werden zwei Beweise hierzu gegeben werden, die sich vom RUTISHAUSERschen Beweis wesentlich unterscheiden[6],[7]. Anschließend wird eine Verallgemeinerung bewiesen, zu deren Formulierung jedoch noch einige Vorbereitungen zu treffen sind: Die analytische Menge $\mathfrak{N}$ werde mit der ihr zugeordneten Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ durch eine Cousin-Verteilung $\mathfrak{F}$ gegeben. Ist $f \in \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{a} \neq 0$, so ist die Vielfachheit $\nu(z, \mathfrak{a})$ der Nullstelle z der Funktion $f(z\,\mathfrak{a})$ (bei festem Vektor $\mathfrak{a}$) unabhängig von $f \in \mathfrak{F}$. Es ist

$$(1.6) \qquad n^*(\mathfrak{a}) = \sum_z \nu(z, \mathfrak{a}) \leq \infty \quad \text{mit} \quad n^*(\mathfrak{a}) = n^*(\lambda\,\mathfrak{a}) \quad \text{für} \quad \lambda \neq 0.$$

Durch die Zuordnung

$$(1.7) \qquad \mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \to \hat{\mathfrak{a}} = (a_1 : \ldots : a_n)$$

wird $\mathfrak{R}^n - \{0\}$ analytisch auf den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{n-1}$ abgebildet. Es sei

$$(1.8) \qquad n(\hat{\mathfrak{a}}) = n^*(\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_k = \{\hat{\mathfrak{a}} \,|\, n(\hat{\mathfrak{a}}) \leq k\}.$$

Ist $V(r)$ der euklidische Oberflächeninhalt von $\mathfrak{N} \cap \{\mathfrak{z} \,|\, |\mathfrak{z}| \leq r\}$, so sei

$$(1.9) \qquad n(r) = \frac{(n-1)!}{(\pi r^2)^{n-1}} V(r).$$

Dann besagt die angekündigte Verallgemeinerung[8]:

II. *Eine analytische Menge $\mathfrak{N}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$, die den Nullpunkt nicht enthält, ist dann und nur dann algebraisch, wenn gilt:*

1. *Das Integral* $\int_0^\infty n(r) \frac{dr}{r^2}$ *existiert.*

2. *Für wenigstens eine natürliche Zahl k ist $\mathfrak{M}_k$ keine analytische Menge mit einer Dimension kleiner als $n-1$.*

In § 3 wird der Satz von RUTISHAUSER unter einer zusätzlichen Voraussetzung auf eine rein p-dimensionale analytische Menge verallgemeinert werden[9]:

III. *Eine rein p-dimensionale analytische Menge des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ läßt sich dann und nur dann in den projektiv abgeschlossenen Raum $\mathfrak{P}^n$ fortsetzen, wenn $\mathfrak{N} \cap \{\mathfrak{z} \,|\, |\mathfrak{z}| \leq r\}$ einen euklidischen Oberflächeninhalt $V(r) = \underset{r \to \infty}{0}(r^{2p})$ hat und wenn $\mathfrak{N}$ längs einer analytischen Ebene $\mathfrak{E}$, die in der unendlichfernen Ebene $\mathfrak{S}$ liegt und die Dimension $n-p-2$ hat, analytisch ist. Dabei sei $0 < p < n$.*

Hiermit ist ein Fortsetzbarkeitskriterium auch im Falle $\dim \mathfrak{N} < \dim \mathfrak{S}$ gegeben, im Gegensatz zu den Kriterien von THULLEN, REMMERT und STEIN sowie RUTISHAUSER, bei denen $\dim_P \mathfrak{N} \geq \dim \mathfrak{S}$ für $P \in \mathfrak{N}$ vorausgesetzt wird.

[6]) Über die Sätze in § 3 und ihre Beweise habe ich auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Mainz (1953) berichtet.

[7]) Siehe S. 295. Der erste Beweis ist eine triviale Folgerung aus STOLL [16] Satz 4 S. 229. Inzwischen hat P. LELONG in [11] eine ähnliche Integraldarstellung wie bei STOLL [16] (4.15), für die ebenfalls die Abschätzung STOLL [16] (5.1) gilt, angekündigt, woraus er in derselben trivialen Schlußweise den Satz von RUTISHAUSER ableitet.

[8]) Man vgl. Satz 5.

[9]) Man vgl. Satz 9.

§ 2. Analytische Flächen endlichen Inhalts.

Eine Funktion $V(\mathfrak{z})$, die in einem Gebiet $\mathfrak{D}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ erklärt ist, heißt *plurisubharmonisch* oder *pseudokonform*[10]) in $\mathfrak{D}$, wenn gilt:

1. Die Funktionswerte $V(\mathfrak{z})$ sind reelle Zahlen oder $-\infty$, also
$$-\infty \leq V(\mathfrak{z}) < \infty.$$
2. In $\mathfrak{D}$ ist $V(\mathfrak{z})$ nach oben halbstetig, d.h. $\overline{\lim_{\mathfrak{z}\to\mathfrak{z}_0}} V(\mathfrak{z}) \leq V(\mathfrak{z}_0)$.
3. Ist $\mathfrak{a} \neq 0$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{D}) = \{\mathfrak{z} | \mathfrak{z} = \mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a} \in \mathfrak{D}\} \neq \varnothing$, so ist $V(\mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a})$ als Funktion von z auf $\mathfrak{E}$ subharmonisch.

Ist $V(\mathfrak{z})$ in der offenen Kugel $\mathfrak{K}$ plurisubharmonisch und gibt es einen Punkt $\mathfrak{b} \in \mathfrak{K}$ mit $V(\mathfrak{b}) \neq -\infty$, so hat die Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{K} \cap \{\mathfrak{z} | V(\mathfrak{z}) = -\infty\}$ das Lebesguesche Maß Null; denn $\mathfrak{M}$ ist meßbar und in jedem Kreis $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ ist $V(\mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a})$ subharmonisch, gilt also $V(\mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a}) = -\infty$ nur für eine Nullmenge des zweidimensionalen Lebesgueschen Maßes. Das ergibt:

Hilfssatz 1. *Ist die Funktion $V(\mathfrak{z}) \not\equiv -\infty$ im Gebiet $\mathfrak{D}$ plurisubharmonisch, so ist $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{z} | V(\mathfrak{z}) = -\infty\}$ eine Nullmenge.*

Beweis. Für einen Punkt $\mathfrak{b} \in \mathfrak{D}$ ist $V(\mathfrak{b}) \neq -\infty$. Zu einer offenen Kugel $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{D}$ gibt es endlich viele Kugeln $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_r$ aus $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_\varrho \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1} \neq \varnothing$ für $\varrho = 1, \ldots, r-1$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_r$. Wegen $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{M} \neq \mathfrak{K}_1$ ist $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{M}$ eine Nullmenge. Ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_\varrho$ eine Nullmenge, so ist $\mathfrak{K}_\varrho \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1} \cap \mathfrak{M} \neq \mathfrak{K}_\varrho \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1}$, also ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1} \neq \mathfrak{K}_{\varrho+1}$, d.h. $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1}$ ist eine Nullmenge. Schließlich erweist sich $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_r = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}$ als eine Nullmenge. Da abzählbar viele Kugeln $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{D}$ das Gebiet $\mathfrak{D}$ überdecken, ist $\mathfrak{M}$ eine Nullmenge, w. z. b. w.

Ein Punkt $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathfrak{R}^n$ wird durch $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{z}) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ in den Raum $\mathfrak{R}^{n-1}$ projiziert. Bezeichnet man die Koordinate z_n auch mit w, so wird $\mathfrak{z} = (\mathfrak{x}, w)$. Mit Hilfssatz 1 folgt nun:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{D}$ ein Gebiet des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^{n-1}$, wird*

(2.1) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{D} \times \{w | 0 < |w| < \varepsilon\} \qquad (\textit{mit } \varepsilon > 0)$$

(2.2) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{D} \times \{w | |w| < \varepsilon\}$$

(2.3) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{D} \times \{w | \delta \leq |w| \leq \varepsilon\} \qquad (\textit{mit } 0 < \delta < \varepsilon)$$

gesetzt und liegt in $\mathfrak{G}$ eine analytische Fläche $\mathfrak{N} \neq \varnothing$, die $\mathfrak{M}$ nicht schneidet, so hat die Menge $\mathfrak{F}$ der Punkte $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$, für die $\mathfrak{N} \cap \pi^{-1}(\mathfrak{x})$ leer ist, das Lebesguesche Maß Null[11]).

Beweis. Wird

(2.4) $$\varrho(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \operatorname{Max}_{(\mathfrak{x}, w) \in \mathfrak{N}} \log |w| & \text{für } \mathfrak{x} \in \mathfrak{D} - \mathfrak{F} \\ -\infty & \text{für } \mathfrak{x} \in \mathfrak{F} \end{cases}$$

gesetzt, so ist $-\infty \leq \varrho(\mathfrak{x}) \leq \log \delta$. Nun werde ein offener Polyzylinder $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{D}$ beliebig gewählt. Im Cousinschen Gebiet $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} \times \{w | 0 < |w| < \varepsilon\}$ gibt es

[10]) Man vgl. Lelong [7] bis [10] und Bremermann [1].
[11]) Für $n = 2$ vgl. man Rothstein [13] Satz 7 und seinen Beweis.

eine analytische Funktion $g(\mathfrak{z}) = g(\mathfrak{x}, w)$ mit $\{\mathfrak{z} \mid g(\mathfrak{z}) = 0\} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}^*$. Die Funktion $\frac{1}{g}$ werde in eine Laurentreihe $\frac{1}{g} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} g_\mu(\mathfrak{x})\, w^\mu$ entwickelt. Der Radius der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} g_{-\mu}(\mathfrak{x})\, w^\mu$ ist $e^{-\varrho(\mathfrak{x})} \geqq \frac{1}{\delta}$. Daher ist $\varrho(\mathfrak{x})$ in dem (beliebigen) Polyzylinder $\mathfrak{K}$, also auch in $\mathfrak{D}$, plurisubharmonisch[12]). Da $\mathfrak{N} \neq \varnothing$ ist, hat $\mathfrak{F}$ das Maß Null, w. z. b. w.

Der analytischen Fläche $\mathfrak{N}$ aus dem Gebiet $\mathfrak{G}$ sei durch eine Cousin-Verteilung $\mathfrak{F}$ die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ zugeordnet. Ist $\mathfrak{z}_0 = (\mathfrak{x}_0, w_0) \in \mathfrak{D}$ und $f \in \mathfrak{F}$ eine Funktion der Verteilung mit $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{U}_f$, so habe die Funktion $f(\mathfrak{x}_0, w)$ der einen Veränderlichen w in w_0 eine Nullstelle der Vielfachheit $\nu_n(\mathfrak{x}_0, w_0) = \nu_n(\mathfrak{z}_0) \geqq 0$. Die Zahl $\nu_n(\mathfrak{z}_0)$ hängt nicht von der Wahl von $f \in \mathfrak{F}$ ab. Daher ist

$$n(\mathfrak{x}) = \sum_{(\mathfrak{x}, w) \in \mathfrak{G}} \nu_n(\mathfrak{x}, w) \leq \infty \tag{2.5}$$

eindeutig als Funktion in der Projektion $\pi(\mathfrak{G})$ erklärt.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{H}$ ein Gebiet im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$, enthält das Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\}$ eine analytische Fläche $\mathfrak{N}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, die in einem Punkt von $\mathfrak{S} = \mathfrak{H} \cap \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\}$ singulär ist, und ist die Projektion $\mathfrak{S}^* = \pi(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ ein Gebiet, so hat die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}^*$, in denen die in (2.5) erklärte Schnittpunktzahl $n(\mathfrak{x}) < \infty$ ist, das Maß Null.*

Beweis. Nach THULLEN 2 ist $\mathfrak{N}$ in jedem Punkt von $\mathfrak{S}$ singulär. Für jede ganze Zahl $m \geqq 0$ werde $\mathfrak{M}_m = \{\mathfrak{x} \mid n(\mathfrak{x}) = m\} \cap \mathfrak{S}^*$ gesetzt. Der Punkt $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{M}_m$ werde beliebig gewählt. Man kann eine Zahl $\varepsilon > 0$ so wählen, daß auf dem Kreis $\{\mathfrak{z} \mid \pi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}_0,\ 0 < |w| \leq \varepsilon\}$ kein Punkt von $\mathfrak{N}$ liegt. Es ist also $m = n(\mathfrak{x}_0) = \sum_{(\mathfrak{x}_0, w) \in \mathfrak{G}} \nu_n(\mathfrak{x}_0, w) = \sum_{|w| > \varepsilon} \nu_n(\mathfrak{x}_0, w)$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz gibt es eine Kugel $\mathfrak{K}$ um $\mathfrak{x}_0$, so daß gilt

a) In $\mathfrak{H}$ liegt $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} \times \{w \mid |w| \leq \varepsilon\}$ und $\pi^{-1}(\mathfrak{M}_m) \cap \mathfrak{K}^* \cap \mathfrak{N}$ ist leer.

b) Es ist $[\mathfrak{K} \times \{w \mid \delta \leq |w| \leq \varepsilon\}] \cap \mathfrak{N} = \varnothing$ für ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon$.

Da $\mathfrak{N}$ im Punkt $(\mathfrak{x}_0, 0)$ singulär wird, ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}^*$ nicht leer; nach Satz 1 ist also $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}_m$ eine Nullmenge. Da abzählbar viele Kugeln die Menge $\mathfrak{M}_m$ überdecken, ist $\mathfrak{M}_m$ eine Nullmenge. Also hat auch $\mathfrak{M} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathfrak{M}_m$ das Maß Null, w. z. b. w.

Satz 3. *Das alternierende Differential*[3])

$$\begin{cases} \chi = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})\, d\bar{z}_\mu\, dz_\nu\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\mid\mid} \ldots \overset{\nu}{\mid\mid} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n + \\ \quad + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})\, d\bar{z}_1\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\mid\mid} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n \end{cases} \tag{2.6}$$

[12]) Man vgl. BREMERMANN [1] S. 34—39.

sei im Gebiet $\mathfrak{H}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ stetig. Zu jeder kompakten Teilmenge $\mathfrak{K} < \mathfrak{H}$ gebe es eine Konstante $c_{\mathfrak{K}} > 0$, so daß

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})\, t_\mu \bar{t}_\nu \geq c_{\mathfrak{K}} |t_n|^2 \tag{2.7}$$

für alle $\mathfrak{z} \in \mathfrak{K}$ und alle Zahlen $t_1, \ldots, t_n$ gelte. Ist nun im Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\}$ eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ gegeben, so läßt sich $\mathfrak{R}$ dann und nur dann in $\mathfrak{H}$ fortsetzen, wenn für jeden kompakten Teil $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z})\, \chi$ existiert.

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ fortsetzbar, so existiert das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z})\, \chi$; denn χ ist stetig[13]). Nun existiere für jeden kompakten Teil $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ das Integral $\int\limits_{\mathfrak{K}\cap\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z})\, \chi$. Für eine beliebige abgeschlossene Kugel $\mathfrak{K} < \mathfrak{H}$ ist dann

$$\infty > \int\limits_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z})\, \chi \geq c_{\mathfrak{K}} \int\limits_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z}) \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots dz_{n-1}\, d\bar{z}_{n-1}. \tag{2.8}$$

In der Projektion $\mathfrak{V} = \pi(\mathfrak{K})$ ist $n(\mathfrak{x}) = \sum\limits_{(\mathfrak{x},\mathfrak{w})\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{w})$ erklärt. Also gilt[14])

$$\begin{cases} \infty > \int\limits_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z}) \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots dz_{n-1}\, d\bar{z}_{n-1} \\ \qquad = \int\limits_{\mathfrak{V}} n(\mathfrak{x}) \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dx_1\, d\bar{x}_1 \ldots dx_{n-1}\, d\bar{x}_{n-1}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Fast überall in $\mathfrak{V}$ ist daher $n(\mathfrak{x}) < \infty$. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{R}$ in allen Punkten des Ebenenstücks $\mathfrak{K} - \mathfrak{G}$ regulär. Da $\mathfrak{K}$ beliebig gewählt war, ist $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ regulär. Weil $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ keinen inneren Punkt hat, ist $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ fortsetzbar, w. z. b. w.

Nunmehr folgt sofort das in der Einleitung angekündigte Kriterium I:

Satz 4. Ein Fortsetzbarkeitskriterium.

Voraussetzung. 1. *Die n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ enthalte die analytische Menge $\mathfrak{S}$ mit* dim $\mathfrak{S} \leq n-1$.

2. *In der offenen Menge $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \mathfrak{S}$ sei eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(P)$ gegeben.*

3. *Auf $\mathfrak{H}$ gebe es ein stetiges alternierendes Differential*[3])

$$\begin{cases} \chi(P) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum\limits_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, d\bar{z}_\mu\, dz_\nu\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\overset{|}{|}} \ldots \overset{\nu}{\overset{|}{|}} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n + \\ \qquad + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}(P)\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\overset{|}{|}} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n. \end{cases} \tag{2.10}$$

In jedem Punkt $P \in \mathfrak{H}$ sei $\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, x_\mu \bar{x}_\nu$ eine positiv definite Hermitesche Form.

4. *Ist $\mathfrak{K}$ ein kompakter Teil von $\mathfrak{H}$, so existiere das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(P)\, \chi$.*

---

[13]) Man vgl. Stoll [15] Satz 11, S. 153.

[14]) Man vgl. Stoll [15] Hilfssatz 7, S. 150.

Behauptung. *Die analytische Fläche $\mathfrak{R}$ läßt sich in $\mathfrak{H}$ fortsetzen.*

Beweis. Nach Satz 3 ist $\mathfrak{R}$ in jedem gewöhnlichen Punkt P von $\mathfrak{S}$ mi $\dim_P \mathfrak{S} = n-1$ regulär. Nach THULLEN ist also $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt von $\mathfrak{S}$ regulär, w. z. b. w.

Sind übrigens die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt und ist $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt von $\mathfrak{S}$ regulär, also in $\mathfrak{H}$ fortsetzbar, so werden die Voraussetzungen 3 und 4 durch ein alternierendes Differential χ erfüllt, und jedes alternierende Differential χ, das der Voraussetzung 3 genügt, erfüllt auch die 4. Voraussetzung.

§ 3. Algebraische Flächen[6]).

Im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ der komplexen Vektoren $\mathfrak{z} = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \mathfrak{e}_\nu$ werde durch

$$(3.1) \qquad (\mathfrak{z}|\mathfrak{w}) = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu \overline{w}_\mu, \qquad |\mathfrak{z}| = \sqrt{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}$$

eine Hermitesche Metrik eingeführt. Die euklidische Maßbestimmung wird durch[15])

$$(3.2) \qquad v_2(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}(d\mathfrak{z}|d\mathfrak{z}), \qquad v_{2k}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{k!}\{v_2(\mathfrak{z})\}^k$$

und die projektive durch[15])

$$(3.3) \qquad \omega_2(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}\left(d\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\middle| d\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\right), \qquad \omega_{2k}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{k!}\{\omega_2(\mathfrak{z})\}^k$$

gegeben. Ist $\mathfrak{R}$ eine analytische Fläche aus $\mathfrak{R}^n$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, so beträgt der euklidische Flächeninhalt des in der Kugel $\mathfrak{B}_r = \{\mathfrak{z} \,|\, |\mathfrak{z}| \leq r\}$ gelegenen Teils

$$(3.4) \qquad \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_r} \nu(\mathfrak{z})\, v_{2n-2}(\mathfrak{z}).$$

Setzt man

$$(3.5) \qquad W_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \quad \text{und} \quad V_{2n}(r) = W_{2n} r^{2n},$$

so ist

$$(3.6) \quad n(r) = \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_r} \nu(\mathfrak{z})\, v_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_r} \nu(\mathfrak{z})\, \omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu(0)$$

die *Anzahlfunktion*, die mit r monoton wächst[16]). Definiert man die Abbildung $\hat{\mathfrak{a}}$ gemäß (1.7), die Vielfachheit $\nu(z, \mathfrak{a})$ wie vor (1.6) und ist $\varphi(\mathfrak{z})$ eine auf $\mathfrak{R}$ meßbare Funktion, so ist

$$(3.7) \qquad \Phi(\hat{\mathfrak{a}}) = \sum_{|z|>0} \nu(z, \mathfrak{a})\, \varphi(z\,\mathfrak{a})$$

eindeutig auf dem projektiven Raum $\mathfrak{P}^{n-1}$ erklärt und es gilt[17])

$$(3.8) \qquad \int_{\mathfrak{R}} \varphi(\mathfrak{z})\, \omega_{2n-2} = \int_{\mathfrak{P}^{n-1}} \Phi(\hat{\mathfrak{a}})\, \omega_{2n-2}(\hat{\mathfrak{a}}),$$

---

[15]) Man vgl. H. KNESER [5] § 1 bis § 3.

[16]) Man vgl. H. KNESER [5] S. 8, Hilfssatz und STOLL [15] Satz 10.

[17]) Man vgl. STOLL [15] Satz 9, S. 148.

falls wenigstens eines der beiden Integrale für $|\varphi|$ statt φ existiert. Ist $n(\hat{a}) = \sum_z \nu(z, a)$, so besteht insbesondere die Beziehung

$$\lim_{r\to\infty} n(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{P}^{n-1}} n(\hat{a})\, \omega_{2n-2}(\hat{a}) + \nu(0), \tag{3.9}$$

falls entweder $n(r)$ beschränkt ist oder das Integral in (3.9) existiert. Ist $\mathfrak{N}$ algebraisch mit der Ordnung m, und, was o. B. d. A. angenommen werden kann, $0 \notin \mathfrak{N}$, so ist $n(\hat{a}) = m$ fast überall auf $\mathfrak{P}^{n-1}$; also ist $n(r)$ gemäß (3.9) beschränkt und $\lim_{r\to\infty} n(r) = m$. Für die Umkehrung, d.h. für den

Satz von Rutishauser: *Ist $\mathfrak{N}$ eine analytische Fläche des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, deren Anzahlfunktion beschränkt ist, so ist $\mathfrak{N}$ algebraisch*[18]).

sollen nun zwei Beweise gegeben werden.

1. Beweis[7]). (Folgerung aus Stoll [*16*] Satz 4.) Bei einer Parallelverschiebung von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}^*$ bleibt der Flächeninhalt (3.4) erhalten, also besteht zwischen den zugehörigen Anzahlfunktionen die Beziehung $n^*(r) = O(n(r))$. Daher kann man o. B. d. A. $\nu(0) = 0$ annehmen. Dann gibt es nach Stoll [*16*] Satz 4 (man vergleiche auch Lelong [*11*]) eine ganze Funktion f, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, und zwar mit der gegebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ und die sich für $|\mathfrak{z}| \leq r$ durch

$$\log|f(\mathfrak{z})| = O\left(2\int_0^{4r} n(t)\,\frac{dt}{t} + \int_{4r}^{\infty} n(t)\,\frac{dt}{t^2} + n(4r)\right) = O(\log r) \tag{3.10}$$

abschätzen läßt. Mit einer Konstanten c und einer ganzen Zahl $m \geqq 0$ gilt

$$|f(\mathfrak{z})| \leq c|\mathfrak{z}|^m \quad \text{für} \quad |\mathfrak{z}| \geq 1. \tag{3.11}$$

Daher ist $f(\mathfrak{z})$ ein Polynom, dessen Grad die Zahl m nicht übersteigt, w. z. b. w.

2. Beweis. (Folgerung aus Satz 3 und Thullen 3.) Man setzt

$$\mathfrak{z} = u_n^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} u_\nu e_\nu + e_n\right), \qquad \mathfrak{w} = \sum_{\nu=1}^{n-1} u_\nu e_\nu, \qquad \mathfrak{u} = (\mathfrak{w}, u_n). \tag{3.12}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \omega_{2n-2}(\mathfrak{w} + e_n) = \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}\left(d\,\frac{\mathfrak{w}+e_n}{|\mathfrak{w}+e_n|}\,\middle|\, d\,\frac{\mathfrak{w}+e_n}{|\mathfrak{w}+e_n|}\right)^{n-1}\\
&= \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{2-2n}\left[\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)(d\mathfrak{w}\,|\,d\mathfrak{w}) - (d\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w})\,(\mathfrak{w}\,|\,d\mathfrak{w})\right]^{n-1}\\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{2-2n}\Big[\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{n-1} du\, d\bar{u}, \ldots du_{n-1}\, d\bar{u}_{n-1} -\\
&\quad - \left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{n-2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n-1}\bar{u}_\mu u_\nu\, du_\mu\, d\bar{u}_\nu \sum_{\varrho=1}^{n-1} du_1\, d\bar{u}_1 \ldots \overset{\varrho}{|\,|} \ldots du_{n-1}\, d\bar{u}_{n-1}\Big]\\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{-n} du_1\, d\bar{u}_1 \ldots du_{n-1}\, d\bar{u}_{n-1}\\
&= \left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{-n} v_{2n-2}(\mathfrak{w}).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

[18]) Man vgl. Rutishauser [*14*] § 13, S. 293—295.

Ist $\mathfrak{H}$ der Raum der Veränderlichen $(u_1, \ldots, u_n) = \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \{\mathfrak{u} | u_n = 0\}$, so existiert das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{G}} \nu(\mathfrak{u}) \, (|\mathfrak{w}|^2 + 1)^{-n} v_{2n-2}(\mathfrak{w})$. Nach Satz 3 läßt sich $\mathfrak{R}$ über die Ebene $u_n = 0$ analytisch fortsetzen, ist also (nach THULLEN 3) algebraisch, w. z. b. w.

Für den letzten Beweis hätte es genügt, wenn für eine Umgebung $\mathfrak{U}$ eines unendlichfernen Punktes das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}} \nu(\mathfrak{z}) \, \omega_{2n-2}(\mathfrak{z})$ existiert hätte. Die Bedingung $n(r) = O(1)$ läßt sich also abschwächen, wie auch durch den folgenden Satz (*Kriterium II*) in etwas anderer Weise bestätigt wird.

Satz 5. *Im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ ist eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, die den Nullpunkt nicht enthält, dann und nur dann algebraisch, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:*

1. *Ist $n(r)$ die Anzahlfunktion von $\mathfrak{R}$, so existiert das Integral $\int\limits_0^\infty n(t) \, \frac{dt}{t^2}$.*

2. *Ist $n(\hat{\mathfrak{a}})$ wie in (1.8) erklärt, so sei für eine ganze Zahl $k \geqq 0$ die Menge $\mathfrak{M}_k = \{\hat{\mathfrak{a}} | n(\hat{\mathfrak{a}}) \leqq k\}$ keine analytische Menge aus dem projektiven Raum $\mathfrak{P}^{n-1}$ mit einer Dimension kleiner als $n-1$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ algebraisch, so sind offensichtlich beide Bedingungen erfüllt. Gelten aber die Bedingungen 1 und 2 für eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}^n$, die nicht durch den Nullpunkt geht und die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ hat, so gibt es eine ganze Funktion f, die auf $\mathfrak{R}$ und nur auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ und für die

$$f(z\,\mathfrak{a}) = \prod_{|y| < \infty} \left(1 - \frac{z}{y}\right)^{\nu(y, \mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{a} \neq 0) \tag{3.14}$$

gilt[19]). Sie werde nach homogenen Polynomen entwickelt: $f(\mathfrak{z}) = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(\mathfrak{z})$, wobei $g_\mu \equiv 0$ oder ein homogenes Polynom vom Grad μ ist. Nach (3.14) ist $\mathfrak{M}_k = \bigcap\limits_{\mu > k} \{\hat{\mathfrak{a}} | g_\mu(\mathfrak{a}) = 0\}$. Daher ist $\mathfrak{M}_k$ analytisch, hat also die Dimension $n-1$, woraus $g_\mu(\mathfrak{a}) \equiv 0$ für $\mu > k$ folgt. Somit ist f ein Polynom, w. z. b. w.

Man kann diesen Satz als ein Analogon zu der bekannten Tatsache ansehen, daß eine ganze transzendente Funktion einer Veränderlichen, deren Ordnung kleiner als 1 ist, unendlich viele Nullstellen hat.

§ 4. Algebraische Mengen.

Vermutlich gelten die vorhergehenden Sätze weitgehend auch für reine p-dimensionale analytische Mengen mit $0 < p < n-1$. Hier wird es jedoch nur gelingen, den Satz von RUTISHAUSER für solche analytische Mengen zu beweisen, und zwar unter einer zusätzlichen Voraussetzung, von der offen bleibt, ob sie überhaupt erforderlich ist. Sicherheitshalber sollen nur solche

[19]) Man vgl. STOLL [16] Satz 5, S. 230 ($q = 0$).

Eigenschaften analytischer Mengen als bekannt vorausgesetzt werden, die bei REMMERT und STEIN [12] bewiesen wurden.

Eine Teilmenge $\mathfrak{K}$ des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n$ heiße ein *Kegel mit der Spitze* S, wenn sie die Vereinigung von eindimensionalen analytischen Ebenen durch S ist. Wenn S ein Punkt des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n$ und $\mathfrak{W}$ eine $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene ist, die S nicht enthält, so gibt es zu jedem Punkt $Q \in \mathfrak{P}^n$ mit $Q \neq S$ genau einen Punkt $\pi(Q) \in \mathfrak{W}$, so daß $Q, \pi(Q)$ und S auf einer eindimensionalen analytischen Ebene liegen. Die Abbildung π heiße die Projektion aus S in $\mathfrak{W}$.

Satz 6. Die Dimension projizierter analytischer Mengen.

Voraussetzung. 1. *Der Kegel $\mathfrak{K}$ mit der Spitze S liege im Gebiet $\mathfrak{G}$ des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n$. Der Kegel ohne Spitze, also $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} - \{S\}$, sei ein Gebiet.*

2. *Die analytische Ebene $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{P}^n$ der Dimension $n-1$ gehe nicht durch S.*

3. *Die in $\mathfrak{G}$ analytische Menge $\mathfrak{N}$ enthalte S nicht.*

Behauptung. *Ist π die Projektion aus S in $\mathfrak{W}$, so gilt:*

1. *Im Gebiet $\mathfrak{K}' = \pi(\mathfrak{K}_1)$ auf $\mathfrak{W}$ ist $\mathfrak{N}' = \pi(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K})$ analytisch.*
2. *Im Gebiet $\mathfrak{K}_1$ ist $\mathfrak{N}^* = \pi^{-1}(\mathfrak{N}')$ analytisch.*
3. *Für $Q \in \mathfrak{N}^*$ ist $\dim_Q \mathfrak{N}^* = 1 + \dim_{\pi(Q)} \mathfrak{N}'$.*
4. *Für $Q' \in \mathfrak{K}'$ ist $\dim_{Q'} \mathfrak{N}' = \max_{Q \in \pi^{-1}(Q')} \dim_Q \mathfrak{N}$.*

Beweis. 1. Der Punkt $Q_0' \in \mathfrak{K}'$ werde beliebig gewählt. In $\mathfrak{P}^n$ führt man homogene Koordinaten $z_0 : z_1 : \ldots : z_n$ ein, so daß $Q_0' = (1:0:\ldots:0)$ der Nullpunkt, $\mathfrak{W}$ die Ebene $z_n = 0$ und $S = (0:\ldots:0:1)$ der uneigentliche Punkt der z_n-Achse ist. Die Projektion des Punktes $(z_0:\ldots:z_n) \neq S$ ist $(z_0:\ldots:z_{n-1}:0)$. Wegen $S \notin \mathfrak{N}$ enthält $\pi^{-1}(Q_0') \cap \mathfrak{N}$ höchstens endlich viele Punkte; diese seien $Q_\nu = (1:0:\ldots:0:a_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, r$. Nach dem Einbettungssatz[20]) gibt es Umgebungen

$$\mathfrak{W}' = \{(1 : z_1 : \ldots : z_{n-1} : 0) \mid |z_\mu| < \varepsilon_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, \ldots, n-1\} \tag{4.1}$$

$$\mathfrak{W} = \pi^{-1}(\mathfrak{W}') \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{W}_\nu = \mathfrak{W} \cap \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \mid |z_n - a_\nu| < \varepsilon_n\} \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{4.3}$$

mit

$$\pi(\mathfrak{W}) = \pi(\mathfrak{W}_\nu) = \mathfrak{W}' \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{W}}_\nu \cap \overline{\mathfrak{W}}_\mu = \varnothing \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu, \tag{4.4}$$

so daß $\mathfrak{N}_\nu' = \pi(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{W}_\nu)$ eine analytische Menge in $\mathfrak{W}'$ ist. Dann ist $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{W}' = \bigcup_{\nu=1}^{r} \mathfrak{N}_\nu'$ ebenfalls eine in $\mathfrak{W}'$ analytische Menge. Weil $Q_0' \in \mathfrak{K}'$ beliebig gewählt war, ist $\mathfrak{N}'$ im Gebiet $\mathfrak{K}'$ analytisch.

2. Da $\mathfrak{N}'$ in $\mathfrak{K}'$ analytisch ist und $\mathfrak{K}_1$ durch π analytisch auf $\mathfrak{K}'$ abgebildet wird, ist $\mathfrak{N}^* = \pi^{-1}(\mathfrak{N}')$ in $\mathfrak{K}_1$ analytisch.

[20]) REMMERT und STEIN [12] Satz 1, S. 267.

3. Der Punkt $Q_0 \in \mathfrak{R}^*$ werde beliebig gewählt. Es sei $Q_0' = \pi(Q_0)$ seine Projektion. Das Koordinatensystem werde wie in 1. gewählt. Die Menge der analytischen Ebenen, die $\mathfrak{R}^*$ (bzw. $\mathfrak{R}'$) in Q_0 (bzw. in Q_0') isoliert schneiden sei $\mathfrak{D}$ (bzw. $\mathfrak{D}'$). Eine analytische Ebene $\mathfrak{E}$ durch Q_0 gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{D}$, wenn $\pi(\mathfrak{E})$ zu $\mathfrak{D}'$ gehört und $\mathfrak{E}$ nicht $\pi^{-1}(Q_0')$ enthält. Also ist

$$\dim_{Q_0} \mathfrak{R}^* = n - \operatorname*{Max}_{\mathfrak{E} \in \mathfrak{D}} \dim \mathfrak{E} = 1 + (n-1) - \operatorname*{Max}_{\mathfrak{E}' \in \mathfrak{D}'} \dim \mathfrak{E}' = 1 + \dim_{Q_0'} \mathfrak{R}'.$$

4. Die 4. Behauptung wird durch Induktion nach $s = \dim \mathfrak{R}$ bewiesen. Ist $s = 0$, so bestehen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ nur aus isolierten Punkten, also ist $\dim_{Q'} \mathfrak{R}' = \operatorname*{Max}_{Q \in \pi^{-1}(Q')} \dim_Q \mathfrak{R} = 0$ für $Q' \in \mathfrak{R}'$. Die 4. Behauptung werde nun für $\dim \mathfrak{R} = 0, 1, \ldots, s-1$ als richtig angenommen. Im Falle $\dim \mathfrak{R} = s$ werden Q_0', Q_ν, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_\nu$, $\mathfrak{R}_\nu'$ wie oben bestimmt. Es seien

$$(4.5) \qquad p_\nu = \dim_{Q_0'} \mathfrak{R}_\nu', \qquad q_\nu = \dim_{Q_\nu} \mathfrak{R}, \qquad p = \dim_{Q_0'} \mathfrak{R}', \qquad q = \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,r} q_\nu.$$

a) *Es ist $p_\nu \geqq q_\nu$ und $p \geqq q$*: Es gibt eine analytische Ebene $\mathfrak{E}$ aus $\mathfrak{V}$ der Dimension $n-1-p_\nu$, die $\mathfrak{R}_\nu'$ in Q_0' isoliert schneidet. Die analytische Ebene $\pi^{-1}(\mathfrak{E})$ der Dimension $n-p_\nu$ schneidet $\mathfrak{R}$ in Q_ν isoliert. Also ist $n-p_\nu \leqq n-q_\nu$ oder $p_\nu \geqq q_\nu$, woraus $p = \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,r} p_\nu \geqq \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,r} q_\nu = q$ folgt.

b) *Es ist $p_\nu \leqq q_\nu$, falls der Punkt Q_ν gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{R}$ ist und $\mathfrak{R}$ in Q_ν eine Tangentialebene $\mathfrak{T}_\nu$ hat, die $\pi^{-1}(Q_0')$ nicht enthält.* Durch Q_ν geht eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_\nu$ der Dimension $n-q_\nu$, die $\pi^{-1}(Q_0')$ enthält und $\mathfrak{T}_\nu$ nur in Q_ν schneidet. Da $\mathfrak{T}_\nu$ die Tangentialebene in Q_ν ist, schneidet $\mathfrak{E}_\nu$ die Menge $\mathfrak{R}$ in Q_ν isoliert. Weil $\overline{\mathfrak{V}}_\nu \cap \mathfrak{R} \cap \pi^{-1}(Q_0')$ nur Q_ν enthält, schneidet $\pi(\mathfrak{E}_\nu)$ die Menge $\mathfrak{R}_\nu'$ in Q_0' isoliert. Weil $\pi(\mathfrak{E}_\nu)$ die Dimension $n-1-q_\nu$ hat, ist $n-1-p_\nu \geqq n-1-q_\nu$ also $p_\nu \leqq q_\nu$. Daraus folgt unmittelbar:

c) *Es ist $p \leqq q$, falls für $\nu = 1, 2, \ldots, r$ die Punkte Q_ν gewöhnliche Punkte von $\mathfrak{R}$ sind und $\mathfrak{R}$ in Q_ν eine Tangentialebene $\mathfrak{T}_\nu$ hat, die $\pi^{-1}(Q_0')$ nicht enthält.*

d) *Es ist $p_\nu \leqq q_\nu$, falls Q_ν gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{R}$ ist.* Wählt man nämlich η_μ mit $0 < 2\eta_\mu < \varepsilon_\mu$ genügend klein und setzt

$$(4.6) \qquad \mathfrak{U} = \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \mid |z_\mu| < 2\eta_\mu \text{ für } \mu = 1, \ldots, n-1 \text{ und } |z_n - a_\nu| < \varepsilon_n$$

$$(4.7) \qquad \mathfrak{U}_1 = \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \mid |z_\mu| < \eta_\mu \text{ für } \mu = 1, \ldots, n-1 \text{ und } |z_n - a_\nu| < \varepsilon_n$$

$$(4.8) \qquad \mathfrak{U}' = \pi(\mathfrak{U}), \qquad \mathfrak{U}_1' = \pi(\mathfrak{U}_1),$$

so gibt es eine offene Umgebung $\mathfrak{U}^*$ des Nullpunkts im Raum der Vektoren $u = (u_1, \ldots, u_{q_\nu})$ und eine pseudokonforme Abbildung $\mathfrak{z}(u)$ von $\mathfrak{U}^*$ auf $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$, deren Funktionalmatrix den Rang q_ν hat. Die Projektion von $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{R}_\nu'$. Sie hat die Parameterdarstellung $\mathfrak{z}'(u) = \pi(\mathfrak{z}(u))$. Dabei kann man $z_{\mu_\varrho}(u) \equiv u_\varrho$ für $\varrho = 1, \ldots, q_\nu$ annehmen. Ist $\mu_\varrho \neq n$ für $\varrho = 1, \ldots, q_\nu$, so liegt Fall b) mit $p_\nu \leqq q_\nu$ vor. Ist $\mu_\varrho = n$ für ein ϱ, so kann man o. B. d. A.

$u_\varrho = n - q_\nu + \varrho$ für $\varrho = 1, \ldots, q_\nu$ annehmen. Dann hat die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_1}, 1, 0, \ldots, 0, 0, 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_2}, 0, 1, \ldots, 0, 0, 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial z_1}{\partial u_{q_{\nu-1}}}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_{q_{\nu-1}}}, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial u_{q_\nu}}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_{q_\nu}}, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0 \end{pmatrix}$$

der Abbildung $\mathfrak{z}'(\mathfrak{u}) = (z_1(\mathfrak{u}), \ldots, z_{n-1}(\mathfrak{u}), 0)$ den Rang q_ν, falls nur $\mathfrak{z}'_{u_{q_\nu}}(\mathfrak{u}) \neq 0$ ist. Da kein Projektionsstrahl $\pi^{-1}(Q')$ für $Q' \in \mathfrak{P}'$ in $\mathfrak{N}$ liegt, ist $\frac{\partial}{\partial u_{q_\nu}} - \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \not\equiv 0$ in jedem Teilgebiet von $\mathfrak{U}^*$. Daher ist $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ und $\mathfrak{z}'_{u_{q_\nu}}(\mathfrak{u}) = 0\}$ eine analytische Menge mit $\dim \mathfrak{M} < q_\nu$ auf $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$. Da aber $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$ nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, ist $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$ analytisch. Wählt man nur die Zahlen η_μ hinreichend klein, so ist $\mathfrak{N} \cap \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \mid |z_\mu| \leqq \eta_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - a_\nu| = \varepsilon_n\}$ leer. Also ist $\overline{\mathfrak{M}} \cap \pi^{-1}(\mathfrak{U}') = \mathfrak{M} \cap \pi^{-1}(\mathfrak{U}')$ und somit $\mathfrak{M}$ sogar in $\pi^{-1}(\mathfrak{U}')$ mit $S \notin \overline{\mathfrak{M}}$ analytisch. Nach Induktionsannahme ist $\mathfrak{M}' = \pi(\mathfrak{M})$ eine analytische Menge aus $\mathfrak{U}'$, für die $\dim \mathfrak{M}' = \dim \mathfrak{M} < q_\nu$ gilt. In allen Punkten $Q \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{M}$ enthält die zugehörige Tangentialebene nicht den Projektionsstrahl $\pi^{-1}(Q')$. Nach c) ist $\dim_{Q'} \mathfrak{N}'_\nu = q_\nu$ für $Q' \in (\mathfrak{N}'_\nu - \mathfrak{M}') \cap \mathfrak{U}'_1$. Da $\dim_{Q'} \mathfrak{M}' < \dim_{Q'_0} \mathfrak{N}'_\nu$ ist, gibt es einen Punkt $Q' \in (\mathfrak{N}'_\nu - \mathfrak{M}') \cap \mathfrak{U}'$, für den $p_\nu = \dim_{Q'_0} \mathfrak{N}'_\nu = \dim_{Q'} \mathfrak{N}'_\nu \leqq q_\nu$ gilt.

e) *Es ist* $p_\nu \leqq q_\nu$. Man kann $\mathfrak{V}_\nu$ so klein wählen, daß $q_\nu = \dim_{Q_\nu} \mathfrak{N} \geqq \dim_Q \mathfrak{N}$ für $Q \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{V}_\nu$ gilt. Die nichtgewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{V}_\nu$ liegen in einer analytischen Menge $\mathfrak{M}$ mit $\dim \mathfrak{M} < q_\nu$. Wie am Schluß des Beweises von d) folgt $p_\nu = \dim_{Q'_0} \mathfrak{N}'_\nu \leqq q_\nu$. Es ergibt sich $p_\nu \leqq q_\nu$ und insgesamt $p = q$, w. z. b. w.

Nun möge zunächst bewiesen werden, daß der Flächeninhalt eines kompakten Teiles einer rein p-dimensionalen analytischen Menge endlich ist.

Satz 7. *Ist in der n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ eine rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{N}$ mit $p > 0$ enthalten, ist das alternierende Differential*

$$\chi = \sum_{\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_p, \nu_p = 1}^{n} a_{\mu_1 \nu_1 \ldots \mu_p \nu_p}(P)\, dz_{\mu_1} d\bar{z}_{\nu_1} \ldots dz_{\mu_p} d\bar{z}_{\nu_p} \tag{4.9}$$

in $\mathfrak{N}$ erklärt, hat es lokal-beschränkte Koeffizienten und ist es, als Differential auf $\mathfrak{N}$ betrachtet, meßbar, so existiert für jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ das Integral $\int_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}} \chi$.

Beweis. Die Behauptung wird durch Induktion nach $n > p$ bewiesen. Für $n = p + 1$ ist sie richtig[13]). Sie werde nun für $p+1, \ldots, n-1$ vorausgesetzt und für n bewiesen. Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{N}$ gibt es eine ortsuniformisierende

Abbildung $\alpha(\mathfrak{z})$, die eine Nullpunktsumgebung $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{R}^n$ auf eine offene Meng $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{G}$ pseudokonform abbildet. Es sei $\mathfrak{R}^* = \alpha^{-1}(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{V})$. Dabei kann ma $\mathfrak{U}, \alpha$ und eine Konstante $M > 0$ so wählen, daß gilt:

1. Es ist $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| < \varepsilon_\mu$ *für* $\mu = 1, \ldots, n\}$ und $\alpha(0) = P_0$.

2. Die Koordinatenachsen schneiden $\mathfrak{R}^*$ nur im Nullpunkt. Jede zwe dimensionale analytische Ebene parallel zu einer Koordinatenachse schneid $\mathfrak{R}^*$ in höchstens m Punkten.

3. Für $\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}$ ist $|a_{\mu_1 \nu_1 \ldots \mu_p \nu_p}(\mathfrak{z})| \leq \dfrac{M}{n^p\, p!}$.

Ist $\mathfrak{z}(u)$ eine Parameterdarstellung in einer Umgebung eines gewöhnliche Punktes von $\mathfrak{R}^*$, so gilt

$$(4.10) \qquad \sum_{\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_p, \nu_p = 1}^{n} a_{\mu_1 \nu_1 \ldots \mu_p \nu_p} \frac{\partial(z_{\mu_1}, \bar{z}_{\nu_1}, \ldots, z_{\mu_p}, \bar{z}_{\nu_p})}{\partial(u_1, \bar{u}, \ldots, u_p, \bar{u}_p)} \Bigg| \leq M \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq n} \left| \frac{\partial(z_{\mu_1}, \ldots, z_{\mu_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)} \right|$$

Die Dichte von χ längs $\mathfrak{R}^*$ ist also nicht größer als die Dichte von $M\, v_$ längs $\mathfrak{R}^*$.

Nun werden Zahlen η_μ mit $0 < 2\eta_\mu < \varepsilon_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, n$ so gewählt, da

$$(4.11) \qquad \mathfrak{R}^* \cap \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| \leq 2\eta_\mu, \quad |z_n| = \eta_n \quad \textit{für} \quad \mu = 1, \ldots, n-1\} = \varnothing$$

ist. Es werde $\mathfrak{U}_n = \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| < 2\eta_\mu\}$ und $\mathfrak{W}_n = \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| \leq \eta_\mu\}$ gesetzt. Die Ab bildung π projiziere $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ auf $\pi(\mathfrak{z}) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. In $\mathfrak{U}_n' = \pi(\mathfrak{U}_n)$ is $\mathfrak{R}' = \pi(\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{U}_n)$ eine analytische Menge der Dimension p. Es gibt eine ana lytische Menge $\mathfrak{M}'$ der Dimension $p-1$, so daß $\mathfrak{R}' - \mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{U}_n - \pi^{-1}(\mathfrak{M}$ nur gewöhnliche Punkte haben. Wie im Beweis von Satz 6 gezeigt wurde, gib es in $\mathfrak{U}_n' - \mathfrak{R}'$ eine analytische Menge $\mathfrak{M}_1' \subseteq \mathfrak{R}'$ mit $\dim \mathfrak{M}_1' < p$, so daß die Tan gentialebene von $\mathfrak{R}$ in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{U}_n - \pi^{-1}(\mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}_1') =$ den Vektor $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ (parallel zur z_n-Achse) nicht enthält. Die p-dimen sionale komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathfrak{R}}$ wird durch π lokal-pseudokonform au $\tilde{\mathfrak{R}}' = \mathfrak{R}' - \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_1'$ abgebildet. Setzt man

$$(4.12) \qquad v_{2p}' = \left(\frac{i}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} dz_\nu\, d\bar{z}_\nu \right)^p \quad \textit{und} \quad \nu(\mathfrak{z}) = \begin{cases} 0 & \textit{für } \mathfrak{z} \notin \mathfrak{R}^*, \\ 1 & \textit{für } \mathfrak{z} \in \mathfrak{R}^*, \end{cases}$$

so existiert nach Induktionsannahme das Integral $\int_{\mathfrak{R}'} v_{2p}' = \int_{\tilde{\mathfrak{R}}'} v_{2p}'$. I $\mathfrak{W}_n' = \pi(\mathfrak{W}_n)$, so gilt[21])

$$(4.13) \qquad m \int_{\tilde{\mathfrak{R}}' \cap \mathfrak{W}_n'} v_{2p}' \geq \int_{\mathfrak{x} \in \tilde{\mathfrak{R}}' \cap \mathfrak{W}_n'} \sum_{(\mathfrak{x}, z_n) \in \mathfrak{W}_n} \nu(\mathfrak{x}, z_n)\, v_{2p}'(\mathfrak{x}) = \int_{\tilde{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{W}_n} v_{2p}'.$$

Da $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{R}$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{R}$ ist, existiert das Integral $\int_{\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{W}_n} v_{2p}' =$ $\int_{\tilde{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{W}_n} v_{2p}'$. Entsprechend folgt für kompakte Umgebungen $\mathfrak{W}_\nu$ des Nullpunkte daß die Integrale

$$\int_{\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{W}_\nu} \frac{1}{p!} \left(\frac{i}{2}\right)^p \left(\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} dz_\mu\, d\bar{z}_\nu \right)^p$$

[21]) Man vgl. STOLL [15] Satz 6, S. 128.

existieren. Der Durchschnitt $\mathfrak{W} = \bigcap_{\nu=1}^{n} \mathfrak{W}_\nu$ ist eine Umgebung des Nullpunktes, für die das Integral $\int_{\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{W}} v_{2p}$ also auch $\int_{\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{W}} \chi(\alpha(\mathfrak{z})) = \int_{\alpha(\mathfrak{W}) \cap \mathfrak{N}} \chi$ existiert. Da jeder kompakte Teil $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ durch endlich viele Umgebungen $\alpha(\mathfrak{W})$ überdeckt wird, existiert das Integral $\int_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}} \chi$, w. z. b. w.

Ist $\mathfrak{G}$ ein Gebiet im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$, das die q-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{S}$ enthält und ist $q < n$, so läßt sich eine rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{G} - \mathfrak{S}$ nur dann über $\mathfrak{S}$ fortsetzen, wenn für jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{K} < \mathfrak{G}$ der Durchschnitt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}$ endlichen Oberflächeninhalt hat. Ob auch die Umkehrung gilt, bleibt offen.

Satz 8. *Enthält das Gebiet $\mathfrak{G}$ des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n$ eine analytische Ebene der Dimension $n-p$ und eine analytische Menge $\mathfrak{N}$, deren Dimension höchstens $p-1$ ist, so liegt in $\mathfrak{G}$ wenigstens eine analytische Ebene $\mathfrak{C}^{n-p}$ der Dimension $n-p$, die $\mathfrak{N}$ nicht schneidet.*

Beweis. Ist $n = p$, so gibt es einen Punkt $P_0 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$. Die nulldimensionale Ebene $\{P_0\} = \mathfrak{C}^0 < \mathfrak{G}$ schneidet $\mathfrak{N}$ nicht. Die Behauptung ist für $n = p$ richtig. Sie werde nun für $\mathfrak{P}^p, \ldots, \mathfrak{P}^{n-1}$ als richtig vorausgesetzt und für $\mathfrak{P}^n$ bewiesen. Es ist $\dim \mathfrak{N} \leq p-1 \leq n-2$. Daher gibt es eine analytische Ebene $\mathfrak{C}_0^{n-p} < \mathfrak{G}$ der Dimension $n-p$, die einen Punkt $S \notin \mathfrak{N}$ enthält. In $\mathfrak{G}$ liegt ein Kegel $\mathfrak{K} > \mathfrak{C}_0^{n-p}$ mit der Spitze S, für den $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} - \{S\}$ ein Gebiet ist. Eine $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene $\mathfrak{W}$ aus $\mathfrak{P}^n$, die nicht durch S geht, werde gewählt. Die Projektion aus S in $\mathfrak{W}$ sei π. Das Gebiet $\mathfrak{K}' = \pi(\mathfrak{K}_1)$ auf $\mathfrak{W}$ enthält die analytische Menge $\mathfrak{N}' = \pi(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}_1)$ mit $\dim \mathfrak{N}' \leq p-1$. Nach Induktionsannahme gibt es eine analytische Ebene $\mathfrak{C}^{n-p-1} < \mathfrak{K}'$ der Dimension $n-1-p$, die $\mathfrak{N}'$ nicht trifft. Die analytische Ebene $\mathfrak{C}^{n-p} = \pi^{-1}(\mathfrak{C}^{n-p-1}) \cup \{S\}$ hat die Dimension $n-p$, liegt in $\mathfrak{K} < \mathfrak{G}$ und schneidet $\mathfrak{N}$ nicht, w. z. b. w.

Nun kann das angekündigte Kriterium III, das eine Verallgemeinerung des Satzes von RUTISHAUSER ist, bewiesen werden.

Satz 9. Algebraizität analytischer Mengen.

Voraussetzung. *Im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ sei eine rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{N}$ mit $0 < p < n$ gegeben. Ist $\mathfrak{B}_r = \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}| \leq r\}$, so sei die Anzahlfunktion*

$$n(r) = \frac{1}{V_{2p}(r)} \int_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}_r} v_{2p} \tag{4.14}$$

beschränkt. Erweitert man den Raum $\mathfrak{R}^n$ mittels einer unendlichfernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ zum projektiven Raum $\mathfrak{P}^n$, so gebe es eine analytische Ebene $\mathfrak{C}^{n-p-2} < \mathfrak{E}_\infty$ der Dimension $n-p-2$, über die sich $\mathfrak{N}$ analytisch fortsetzen läßt[22]).

[22]) Im Falle $p = n-1$ ist $\mathfrak{E}^{n-p-2} = \varnothing$ und im Falle $p = n-2$ besteht $\mathfrak{E}^{n-p-2}$ genau aus einem Punkt. Es gibt transzendente analytische Mengen der reinen Dimension p, die auf einer solchen Ebene $\mathfrak{E}^{n-p-2}$ regulär sind, wie ein Beispiel am Schluß der Arbeit zeigt.

Behauptung. *Die analytische Menge $\mathfrak{N}$ ist algebraisch.*

Beweis. Für $n=p+1$ ist die Behauptung nach dem Satz von RUTISHAUSER richtig. Nun werde sie für $\mathfrak{N}^{p+1}, \ldots, \mathfrak{N}^{n-1}$ als richtig vorausgesetzt und für $\mathfrak{N}^n$ bewiesen. Die analytische Menge $\mathfrak{N}$ läßt sich in ein Gebiet $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}^n \cup \mathfrak{E}^{n-p-2} \subset \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}^n$ zu einer rein p-dimensionalen analytischen Menge $\mathfrak{N}_0$ fortsetzen, die minimal gewählt sei. Es ist $\mathfrak{N}_0 = \overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{G}$. Jeder irreduzible Teil von $\mathfrak{N}_0$ hat Punkte in $\mathfrak{N}^n$; also ist $\dim(\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{E}_\infty) \leq p-1$. Es konnte $\mathfrak{G}$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}_\infty$ ein Gebiet auf $\mathfrak{E}_\infty$ ist. Da $\dim \mathfrak{E}^{n-p-2} = (n-1)-(p+1)$ und $\dim(\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{E}_\infty) < (p+1)-1$ ist, gibt es nach Satz 8 eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_0^{n-p-2} \subset \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}_\infty$ der Dimension $n-p-2$, die $\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{E}_\infty$ also auch $\overline{\mathfrak{N}}$ nicht schneidet. Ein beliebiger Punkt $S \in \mathfrak{E}_0^{n-p-2}$ und eine analytische Ebene $\mathfrak{W}$ der Dimension $n-1$ mit $S \notin \mathfrak{W}$ werden gewählt. Die Ebene $\mathfrak{W}$ gehe durch den Nullpunkt von $\mathfrak{N}^n$. Die Projektion aus S in $\mathfrak{W}$ sei π. Die Vereinigung aller eindimensionalen analytischen Ebenen aus $\mathfrak{G}$ durch S bildet einen Kegel $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{P}^n$, für den $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} - \{S\}$ offen ist. Wegen $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{N} \cup \mathfrak{E}_0^{n-p-2}$ ist $\mathfrak{K}_1$ sogar ein Gebiet. Die Projektion $\mathfrak{N}_0' = \pi(\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{K}_1)$ ist nach Satz 6 eine analytische Menge aus dem Gebiet $\mathfrak{K}' = \pi(\mathfrak{K}_1)$, die die Dimension p hat. Wegen $\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{W} \cap \mathfrak{N}^n$ ist $\mathfrak{N}' = \pi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}_0' \cap \mathfrak{N}^n$ eine rein p-dimensionale analytische Menge aus $\mathfrak{W} \cap \mathfrak{N}^n$, die sich in $\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{W} \cap \mathfrak{N}^n$ analytisch zu $\mathfrak{N}_0' = \overline{\mathfrak{N}'} \cap \mathfrak{K}'$ fortsetzen läßt. In $\mathfrak{K}'$ liegt die analytische Ebene $\mathfrak{E}_1^{n-p-3} = \pi(\mathfrak{E}_0^{n-p-2} - \{S\})$ die die Dimension $(n-1)-p-2$ hat.

In geeignet gewählten homogenen Koordinaten $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ werde die unendlichferne Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ durch $z_0 = 0$, die Ebene $\mathfrak{W}$ durch $z_n = 0$ und der Punkt S durch $(0 : \ldots : 0 : 1)$ gegeben. Durch die Abbildung π wird $(z_0 : \ldots : z_n) \neq S$ auf $(z_0 : \ldots : z_{n-1} : 0)$ projiziert. Im Raum $\mathfrak{N}^n$ erhält man die zugehörigen unhomogenen Koordinaten, indem man $z_0 = 1$ setzt. In ihnen hat die gegebene Metrik die Gestalt:

$$(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{w}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} z_\mu \overline{w}_\nu, \tag{4.15}$$

wobei $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} z_\mu \overline{z}_\nu$ eine positiv definite Hermitesche Form ist. Mit zwei Konstanten $b > 0$, $c > 0$ gilt also

$$\frac{1}{b^2} \sum_{\mu=1}^{n} |z_\mu|^2 \leq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} z_\mu \overline{z}_\nu \leq b^2 \sum_{\mu=1}^{n} |z_\mu|^2, \tag{4.16}$$

$$c \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_p=1}^{n} |z_{\mu_1 \ldots \mu_p}|^2 \leq \sum_{\mu_1,\nu_1,\ldots,\mu_p,\nu_p=1}^{n} g_{\mu_1\nu_1} \cdots g_{\mu_p\nu_p} z_{\mu_1 \ldots \mu_p} \overline{z}_{\nu_1 \ldots \nu_p}. \tag{4.17}$$

Führt man eine zweite Metrik

$$(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{w})_0 = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu \overline{w}_\mu, \qquad |\mathfrak{z}|_0 = \sqrt{(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z})_0} \tag{4.18}$$

ein, so gilt

$$\mathfrak{B}_{br} = \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}| \leq br\} \supseteq \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}|_0 \leq r\} = \mathfrak{B}_r^0. \tag{4.19}$$

Ist $n^0(r)$ die Anzahlfunktion von $\mathfrak{N}$ bezüglich der Metrik $(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{w})_0$, so folgt

$$(4.20)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\, n(b\,r) = \dfrac{c^{-1}}{V_{2p}(r)} \displaystyle\int_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{B}_{br}} \frac{1}{p!}\left(\frac{i}{2}\right)^p \sum_{\mu_1,\nu_1,\ldots,\mu_p,\nu_p=1}^{n} g_{\mu_1\nu_1}\ldots g_{\mu_p\nu_p}\, dz_{\mu_1} d\bar{z}_{\nu_1}\ldots dz_{\mu_p} d\bar{z}_{\nu} \\ \qquad \geqq \dfrac{1}{V_{2p}(r)} \displaystyle\int_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{B}_r^0} \frac{1}{p!}\left(\frac{i}{2}\right)^p \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_p=1}^{n} dz_{\mu_1} d\bar{z}_{\mu_1}\ldots dz_{\mu_p} d\bar{z}_{\mu_p} = n^0(r). \end{cases}$$

Daher ist $n^0(r) \leqq M$ beschränkt. Da $\mathfrak{N}_0 = \overline{\mathfrak{N}} \cap G$ den Punkt $S = (0:\ldots:0:1)$ nicht enthält, gibt es eine Zahl $c > 2$, so daß $\mathfrak{N}$ in $\{(\mathfrak{x}, z_n)\,|\,c\,|\mathfrak{x}| < 2\,|z_n|,\ c < 2\,|z_n|\}$ nicht eindringt. Es sei $\mathfrak{B}'_r = \mathfrak{B}_r^0 \cap \mathfrak{W}$. Setzt man $r = c\,\varrho$, so ist $\pi(\mathfrak{B}_r^0 \cap \mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{B}'_\varrho \cap \mathfrak{N}'$ für $\varrho > 1$. Werden

$$(4.21)\qquad v'_2 = \frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{n-1} dz_\mu\, d\bar{z}_\mu \quad \text{und} \quad v'_{2p} = \frac{1}{p!}\,(v'_2)^p$$

gesetzt, so ist

$$(4.22)\qquad n'(\varrho) = \frac{1}{V_{2p}(\varrho)} \int_{\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{B}'_\varrho} v'_{2p}$$

die Anzahlfunktion von $\mathfrak{N}'$. Die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ sei mit $\mathfrak{N}^*$, die von $\mathfrak{N}'$ sei mit $\mathfrak{N}'^*$ bezeichnet. Abgesehen von einer Nullmenge $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{N}^*$ bildet π die Menge $\mathfrak{N}^*$, also $\mathfrak{N}^* - \mathfrak{M}$, lokalpseudokonform auf $\mathfrak{N}'^* - \pi(\mathfrak{M})$ ab, wobei $\mathfrak{M}' = \pi(\mathfrak{M})$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{N}'$ ist. Setzt man

$$(4.23)\qquad \nu(\mathfrak{z}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{z} \notin \mathfrak{N}, \\ 1 & \text{für } \mathfrak{z} \in \mathfrak{N}, \end{cases}$$

so gilt[21])

$$(4.24)\qquad M \geqq n^0(r) = \frac{1}{V_{2p}(r)} \int_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{B}_r^0} v'_{2p} \geqq \frac{1}{V_{2p}(r)} \int_{\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{B}'_\varrho} \sum_{(\mathfrak{x},z_n)\in\mathfrak{X}_r^0} \nu(\mathfrak{x}, z_n)\, v'_{2p}(\mathfrak{x}) \geqq \frac{n'(\varrho)}{c^{2p-2}}$$

für $r = c\,\varrho$ mit $\varrho > 1$. Nach Induktionsannahme ist also $\mathfrak{N}'$ algebraisch. Daher ist $\overline{\mathfrak{N}}'$ eine rein p-dimensionale analytische Menge aus $\mathfrak{W}$. Die Kegel $\mathfrak{N}^* = \pi^{-1}(\mathfrak{N}') \geqq \mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{N}}^* = \pi^{-1}(\overline{\mathfrak{N}}') \cup \{S\}$ sind rein $(p+1)$-dimensionale analytische Mengen aus $\mathfrak{N}^n$ bzw. $\mathfrak{P}^n$. Es ist $\mathfrak{N}^*$ algebraisch.

Wegen $\dim\{\overline{\mathfrak{N}}' \cap \pi(\mathfrak{E}_\infty)\} \leqq p-1$ gibt es nach Satz 8 eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_1^{n-p-2} < \pi(\mathfrak{E}_\infty)$ der Dimension $n-p-2 \geqq 0$, die $\overline{\mathfrak{N}}'$ nicht trifft. Also ist $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{E}_1^{n-p-2} = \varnothing$ und somit $\mathfrak{N}$ über $\mathfrak{E}_1^{n-p-2}$ fortsetzbar. Man wählt $\widetilde{S} \in \mathfrak{E}_1^{n-p-2}$ und eine analytische Ebene $\widetilde{\mathfrak{W}}$ der Dimension $n-1$ durch S und den Nullpunkt, die $\widetilde{S}$ nicht trifft. Die Projektion aus $\widetilde{S}$ in $\widetilde{\mathfrak{W}}$ sei $\widetilde{\pi}$. Die Projektion $\widetilde{\mathfrak{N}}' = \widetilde{\pi}(\mathfrak{N})$ ist algebraisch und hat die Dimension p. Ebenso ist der Kegel $\widetilde{\mathfrak{N}}^* = \widetilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{N})$ algebraisch und hat die Dimension $p+1$. Der Durchschnitt $\widetilde{\mathfrak{N}}^* \cap \mathfrak{N}^* \geqq \mathfrak{N}$ ist algebraisch und hat höchstens die Dimension $p+1$. Angenommen er hat die Dimension $p+1$, so haben $\mathfrak{N}^*$ und $\widetilde{\mathfrak{N}}^*$ einen gemeinsamen irreduzibeln Teil $\mathfrak{L}$ der Dimension $p+1$. Es ist $\overline{\mathfrak{L}}$ ein Kegel mit den Spitzen S und $\widetilde{S}$, also liegt die eindimensionale analytische Ebene $\mathfrak{E}$ durch S und $\widetilde{S}$

in $\overline{\mathfrak{L}} \subseteq \overline{\mathfrak{N}}^*$; daher ist $\{\tilde{S}\} = \pi(\mathfrak{E}) \subseteq \pi(\overline{\mathfrak{N}}^*) = \overline{\mathfrak{N}}'$, was falsch ist. Also ist $\tilde{\mathfrak{N}}^* \cap \mathfrak{N}$ eine p-dimensionale algebraische Menge, die die rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{N}^n$ umfaßt. Somit ist $\mathfrak{N}$ algebraisch, w. z. b. w.

Die Forderung $n(r) = O(1)$ kann vielleicht abgeschwächt, aber nicht ganz entbehrt werden, wie das Beispiel

$$\mathfrak{N} = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 = z_2^2, \quad z_2 = e^{z_3}\} \tag{4.25}$$

zeigt. Ob man aber auf die Voraussetzung: „$\mathfrak{N}$ läßt sich über eine analytische Ebene $\mathfrak{E}^{n-2-p} \subset \mathfrak{E}_\infty$ der Dimension $n-2-p$ fortsetzen" verzichten kann, bleibt ungeklärt.

Literatur.

[1] Bremermann, H.-J.: Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen. Schriftr. Math. Inst. Univ. Münster **5**, 1—92 (1951). — [2] Cartan, H.: Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Proc. Internat. Congr. of Math. **1**, 152—164 (1950). — [3] Chow, W.-L.: On compact complex analytic varieties. Amer. J. Math. **71**, 893—914 (1949). — [4] Hermes, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Bereichen. Math. Ann. **120**, 539—562 (1947). — [5] Kneser, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. dtsch. Math.-Ver. **48**, 1—28 (1938). — [6] Kneser, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. **4**, 382—391 (1950). — [7] Lelong, P.: Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **62**, 301—338 (1945). — [8] Lelong, P.: Propriétiés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **67**, 393—419 (1950). — [9] Lelong, P.: Sur la représentation d'une fonction plurisousharmonique à partir d'un potentiel. C. R. Acad. Sci., Paris **237**, 691—693 (1953). — [10] Lelong, P.: Sur l'extension aux fonctions entières de n variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstrass. C. R. Acad. Sci., Paris **237**, 865—867 (1953). — [11] Lelong, P.: Sur l'étude des noyaux primaires et sur un théorème de divisibilité des fonctions entières de n variables. C. R. Acad. Sci., Paris **237**, 1379—1381 (1953). — [12] Remmert, R., u. K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [13] Rothstein, W.: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. **126**, 221—238 (1953). — [14] Rutishauser, H.: Über die Folgen und Scharen von analytischen und meromorphen Funktionen mehrerer Variabeln, sowie von analytischen Abbildungen. Acta math., Stockh. **83**, 249—325 (1950) § 13. — [15] Stoll, W.: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **57**, 116—154 (1952). — [16] Stoll, W.: Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen. Math. Z. **57**, 211—237 (1953). — [17] Thullen, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **111**, 137—157 (1934).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 25. März 1954.)

Hadwiger, H., und W. Nef
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 305—319 (1954)

Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen.

Von
H. Hadwiger und W. Nef.

Die hier skizzierte, auf axiomatischer Grundlage aufgebaute Theorie bezieht sich auf die invariante Integration in einer abstrakten Menge, welche Wirkungsraum einer vorgegebenen Transformationsgruppe ist. Eine beliebig, aber fest gewählte, nichtnegative Funktion im Raum übernimmt die Rolle einer normierenden Einheitsfunktion.

Das Ziel der Untersuchungen ist es, unter Wahrung der hier vorgesehenen größtmöglichen Allgemeinheit Aussagen zu gewinnen, welche mit Verwendung eigens hierfür entwickelter Schlußmethoden allein aus den der Integrationstheorie zugrunde gelegten Postulaten gefolgert werden können.

Da bei Raum und Gruppe keine Voraussetzungen topologischer oder sogar metrischer Art vorgesehen sind, trägt die Arbeitsweise dieser Theorie einen mehr algebraischen Charakter.

Im Mittelpunkt der Theorie steht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Integrationssystems.

Die Gültigkeit des Kriteriums ist in den individuellen Fällen von der Struktur des Raumes, von der Art der Gruppe und auch von der Wahl der Einheitsfunktion abhängig.

Einfachste und typische Fälle, in welchen die Existenzfrage generell und positiv beantwortet werden kann, sind etwa die folgenden:

a) Der Raum ist abzählbar oder endlich;

b) die Gruppe ist abelsch;

c) die Einheitsfunktion ist identisch Eins.

Im weiteren werden unter der Voraussetzung, daß das Existenzkriterium erfüllt ist, spezielle Integrationssysteme konstruiert, welche innerhalb der axiomatischen Theorie dadurch von besonderer Bedeutung sind, daß sie mit allen überhaupt existierenden Systemen ausgezeichnete Bindungen eingehen.

So erscheint das elementare Integrationssystem als das kleinste, das in jedem anderen als Teilsystem enthalten sein muß.

Das absolute Integrationssystem umfaßt alle Funktionen, für welche der Integralwert eindeutig durch die Postulate bestimmt ist, so daß er in allen Systemen, in denen die betreffende Funktion noch integrierbar ist, der nämliche sein muß. Dieser eindeutig festliegende Wert ist selbst ein Integral.

Sehr spezielle Fälle absoluter Integrale sind beispielsweise:

a) Der Mittelwert von W. Maak oder J. von Neumann bei ergodischen oder fastperiodischen Funktionen über Gruppen.

b) Das HAARsche Integral bei stetigen Funktionen über kompakten topologischen Gruppen.

Die konstruktiven Ansätze, die dem Aufbau der Theorie zugrunde liegen, sind zum Teil eng verwandt mit älteren Ideen von BANACH, TARSKI, I. VON NEUMANN u. a.

I. Begriffe und Bezeichnungen.

$\mathfrak{R}$ bedeute eine Menge *(abstrakter Raum)* und $x, y, z, \ldots$ Elemente (*Punkte*) von $\mathfrak{R}$. Weiter bezeichne Γ eine *Transformationsgruppe* auf $\mathfrak{R}$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *Transformationen* aus Γ.

Mit $\alpha\, x$ bezeichnen wir den Bildpunkt von x bezüglich der Transformation α.

$F(x), G(x), \ldots$ (kürzer $F, G, \ldots$) sollen reellwertige *Funktionen* auf $\mathfrak{R}$ bedeuten.

Der Transformation $\alpha \in \Gamma$ ordnen wir im linearen Raum dieser Funktionen folgende Transformation zu:

$$F(x) \to F^{\alpha}(x) = F(\alpha\, x).$$

Es gilt dann:

$$(F^{\alpha})^{\beta}(x) = F^{\alpha}(\beta\, x) = F\big((\alpha\beta)\, x\big)$$

oder kurz

$$(F^{\alpha})^{\beta} = F^{\alpha\beta}.$$

Weiter bezeichne $E = E(x)$ eine ein für allemal festgelegte reellwertige, beschränkte und nichtnegative Funktion, welche nicht identisch verschwinden soll. Es gilt also (c reell)

$$0 \leq E \leq c; \quad E \not\equiv 0.$$

E heißt *Einheitsfunktion*.

Mit $p \cdot E$ bezeichnen wir eine Funktion, welche sich in der Form

$$(1) \qquad p \cdot E = \sum p_{\nu} E^{\alpha_{\nu}} \qquad p = \sum p_{\nu}$$

darstellen läßt (p_{ν} reelle Zahlen, $\alpha_{\nu} \in \Gamma$), die also linear durch endlich viele Funktionen, die mit der Einheitsfunktion kongruent sind, ausdrückbar ist. Wir sagen auch, daß (1) eine Auslegung der Einheitsfunktion sei. Eine solche Funktion $p \cdot E$ nennen wir *elementar*.

Man beachte, daß eine elementare Funktion so definiert ist, daß sicher wenigstens eine Darstellung als Auslegung von E gemäß (1) garantiert ist; es ist leicht zu zeigen, daß dann auch unendlich viele derartige Darstellungen möglich sind. Das Symbol $p \cdot E$ bezeichnet weiter bei gegebener reeller Zahl p nicht eine eindeutig bestimmte Funktion, sondern einen individuell nicht näher fixierten Repräsentanten einer gewissen Funktionenklasse.

Eine Funktion F nennen wir *E-beschränkt*, wenn für eine passend gewählte elementare Funktion $p \cdot E$ die Ungleichung

$$(2) \qquad |F| \leq p \cdot E$$

besteht. Die Menge der E-beschränkten Funktionen über $\mathfrak{R}$ ist offensichtlich eine lineare Mannigfaltigkeit; sie werde mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Die im folgenden vorkommenden Funktionen sind alle als E-beschränkt vorausgesetzt; $\mathfrak{B}$ ist also die der Integrationstheorie zugrunde gelegte Funktionenmannigfaltigkeit.

Für die Entwicklung der nachfolgend skizzierten Theorie sind drei Grundgegebenheiten unabänderlich fest gedacht, nämlich der Raum $\mathfrak{R}$, die Gruppe Γ und die Einheitsfunktion E.

II. Integrationssysteme.

In diesem Abschnitt definieren wir die grundlegenden Begriffe Integralfeld, Integral und Integrationssystem.

Definition 1. *Eine Klasse $\mathfrak{F}$ E-beschränkter Funktionen, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$, heißt Integralfeld, wenn die folgenden Postulate erfüllt sind:*

I°. *Aus $F \in \mathfrak{F}$ folgt $F^{\alpha} \in \mathfrak{F}$ für alle $\alpha \in \Gamma$; $\mathfrak{F}$ ist Γ-frei.*

II°. *Aus $F, G \in \mathfrak{F}$ folgt $aF + bG \in \mathfrak{F}$, wo a, b reelle Zahlen sind; $\mathfrak{F}$ ist linear.*

III°. *Es gilt $E \in \mathfrak{F}$; F ist normal.*

Ein Integralfeld $\mathfrak{F}$ ist also eine Γ-freie, lineare und normale (echte oder unechte) Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{B}$.

Definition 2. *Ein auf einem Integralfeld $\mathfrak{F}$ definiertes reellwertiges Funktional $J(F)$ heißt Integral auf $\mathfrak{F}$, wenn die folgenden Postulate erfüllt sind:*

I. $J(F) = J(F^{\alpha})$ $(\alpha \in \Gamma)$; *J ist Γ-invariant.*

II. $J(aF + bG) = aJ(F) + bJ(G)$; *$J$ ist linear*[1]).

III. $J(E) = 1$; *J ist normiert.*

IV. *Aus $F \geq 0$ folgt $J(F) \geq 0$; J ist definit.*

Ein Integral J ist also ein über einem Integralfeld reellwertig definiertes Γ-invariantes (kurz: invariantes), lineares, normiertes und definites Funktional.

Definition 3. *Ein Integrationssystem $(\mathfrak{F}, J)$ entsteht durch Zusammenfassung eines Integralfeldes $\mathfrak{F}$ und eines darauf erklärten Integrals J.*

Die axiomatische Integrationstheorie hat sich mit den so charakterisierten Integrationssystemen zu befassen. Es soll hierbei darauf ankommen, Aussagen unter alleiniger Beanspruchung der gesetzten Postulate zu gewinnen[2]).

III. Existenzkriterium.

Wir können die wichtige Frage stellen, ob bei fest vorgegebenen $\mathfrak{R}, \Gamma$ und E stets Integrationssysteme $(\mathfrak{F}, J)$ existieren. Durch ein Beispiel werden wir unten belegen, daß dies keineswegs immer der Fall ist.

Selbstverständlich ist es auf verschiedene Weise möglich, Kriterien für die Existenz zu formulieren[3]). Wir wählen eine Form, welche durch ihre besondere Einfachheit als geeignet erscheint, ins Zentrum der Theorie gestellt zu werden. Es gilt das folgende notwendige und hinreichende

[1]) Dieses Postulat läßt sich unter Mitberücksichtigung der übrigen aus einem schwächeren folgern. Es genügt zu verlangen: $J(F+G) = J(F) + J(G)$; J ist additiv.

[2]) Besonders zu beachten ist, daß bezüglich des Raumes keine weiteren Voraussetzungen, etwa metrischer oder auch nur topologischer Art gemacht werden müssen.

[3]) Vgl. hierzu: W. Nef, Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration. Comm. Math. Helv. **28**, 162—172 (1954), insb. Satz 11.

Existenzkriterium. *Dann und nur dann existiert ein Integrationssystem, wenn folgendes gilt:*

(3) $$\text{Aus} \quad p \cdot E \geq 0 \quad \text{folgt} \quad p \geq 0.$$

Daß die Bedingung notwendig ist, wird wie folgt bewiesen: Es sei $(\mathfrak{F}, J)$ ein Integrationssystem. Mit I^0, II^0 und III^0 schließt man, daß eine Auslegung $p \cdot E$ von E zu $\mathfrak{F}$ gehört und mit I, II, III folgt, daß $J(p \cdot E) = \ldots$ sein muß. Mit IV folgt jetzt $p \geq 0$, wenn wie vorausgesetzt $p \cdot E \geq 0$ ist. Da die Bedingung hinreicht, wird durch die Konstruktion eines besonderen Integrationssystems bewiesen, die wir im folgenden Abschnitt durchführen.

Vorerst zeigen wir, daß das Existenzkriterium tatsächlich nicht immer erfüllt ist; damit ist selbstverständlich auch nachgewiesen, daß nicht immer Integrationssysteme existieren[4]).

Wie Mazurkiewicz und Sierpinski gezeigt haben[5]), existiert in der euklidischen Ebene eine Punktmenge $\mathfrak{W}$, die in zwei disjunkte Teilmengen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ zerlegt werden kann, $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} + \mathfrak{V}$, so daß aber alle drei Punktmengen unter sich kongruent sind, d.h. daß $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{U} \cong \mathfrak{V}$ gilt.

Es sei jetzt $\mathfrak{R}$ die euklidische Ebene und Γ ihre Bewegungsgruppe; ferner sei $E = W$, wobei W die charakteristische Funktion der Punktmenge $\mathfrak{W}$ bedeutet. Mit Rücksicht auf die „paradoxen" Zerlegungsverhältnisse schließt man auf eine Relation $E = 2 \cdot E$ oder auch $E - 2 \cdot E = 0$. Dies läßt sich auch schreiben $p \cdot E = 0$ und $p = -1$, womit die Unrichtigkeit von (3) nachgewiesen ist.

Später werden wir zeigen, daß das Existenzkriterium immer erfüllt ist, wenn die Transformationsgruppe Γ abelsch ist.

IV. Das elementare Integrationssystem.

In diesem Abschnitt wird unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (3) des Existenzkriteriums erfüllt ist, ein spezielles System $(\mathfrak{E}, I)$ konstruiert, das wir das *elementare Integrationssystem* nennen wollen. Damit ist zugleich auch gezeigt, daß diese Bedingung für die Existenz eines Integrationssystems hinreicht.

Es sei $p \cdot E$ eine elementare Funktion, also eine Funktion, für welche eine Darstellung der Form (1) als Auslegung von E gibt. Wie bereits früher hervorgehoben wurde, gestattet ein und dieselbe elementare Funktion offensichtlich verschiedene Darstellungen dieser Art. Wir zeigen jetzt aber, daß

[4]) Das nachfolgend vorgetragene Beispiel ist so gewählt, daß die Abhängigkeit der Existenzfrage von der Wahl der Einheitsfunktion nachgewiesen ist: Auch in Fällen, wo der betreffende Raum bei gleicher Gruppe geläufige Integrationssysteme zuläßt, können Einheitsfunktionen so gewählt werden, daß kein Integrationssystem möglich ist.

Herr H. Wielandt hat uns in freundlicher Weise darauf aufmerksam gemacht, daß es sehr einfach ist, die Ungültigkeit des Existenzkriteriums bei passend gewählten Gruppen nachzuweisen. Wir verdanken ihm das folgende Beispiel: Es sei $\mathfrak{R}$ die reelle Gerade, Γ die Gruppe der linearen Transformationen $x' = a\,x + b$ $(a \neq 0)$ und $E(x) = 1$ $(0 \leq x \leq 1)$, $= 0$ (sonst); hier gilt $(-1) \cdot E = E(x) - E(3\,x) - E(3 - 3\,x) \geq 0$!

[5]) Mazurkiewicz, E., u. W. Sierpinski: Sur un ensemble superposable avec chacun de ses deux parties. C. R. Acad. Sci. Paris **158**, 618—619 (1914).

unter Voraussetzung der Gültigkeit von (3) jedenfalls die Koeffizientensumme $p = \sum p_r$ immer die gleiche sein muß. Genauer:

(4) $$\text{Aus} \quad p \cdot E = q \cdot E \quad \text{folgt} \quad p = q.$$

In der Tat: Setzen wir $p - q = r$, so gilt $p \cdot E - q \cdot E = r \cdot E = 0$. Nach (3) folgt $r \geqq 0$. Vertauschen wir p und q, so folgt ebenso $-r \geqq 0$. Also ist $r = 0$, w. z. b. w.

Wir formulieren nun die folgende

Definition 4. *Das elementare Integrationssystem* $(\mathfrak{E}, I)$ *entsteht durch Zusammenfassung des Integralfeldes* $\mathfrak{E}$ *aller elementaren Funktionen*

(5) $$F = p \cdot E \qquad [-\infty < p < +\infty]$$

und des auf $\mathfrak{E}$ *definierten Integrals*

(6) $$I(F) = p \qquad [F = p \cdot E].$$

Es ist zu prüfen, ob die Postulate, welche wir zur axiomatischen Charakterisierung der Integrationssysteme gewählt haben, durch das so konstruierte System erfüllt werden. Dies ist in der Tat der Fall. Zunächst ist klar, daß jede elementare Funktion E-beschränkt ist. Der Nachweis, daß die Feldpostulate I^0 bis III^0 erfüllt werden, ist trivial. Nach (4) schließt man, daß das Integral I über $\mathfrak{E}$ nach Ansatz (6) eindeutig erklärt ist. Dieser entscheidende Schluß wurde nur ermöglicht durch die als gültig vorausgesetzte Bedingung (3) des Existenzkriteriums. Die Verifikation der Integralpostulate I bis III ist sehr einfach. Die Gültigkeit von IV ist wiederum eine Folgerung aus (3).

Ist das Existenzkriterium erfüllt, so gibt es nach der soeben vollzogenen Konstruktion wenigstens das elementare Integrationssystem. Im allgemeinen existiert aber eine Mannigfaltigkeit verschiedener Integrationssysteme, welche sich alle auf die gemeinsamen drei Grundgegebenheiten $\mathfrak{R}$, Γ und E beziehen.

Die besondere und einfache Bedeutung, welche dem elementaren Integrationssystem innerhalb der Mannigfaltigkeit aller Systeme zukommt, wird ausgedrückt mit dem folgenden

Satz 1. *Das elementare Integrationssystem* $(\mathfrak{E}, I)$ *ist in jedem anderen Integrationssystem* $(\mathfrak{F}, J)$ *als Teilsystem enthalten, d.h. es gilt* $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ *und* $J(F) = I(F)$ *für* $F \in \mathfrak{E}$.

In der Tat: Aus den Feldpostulaten I^0 bis III^0 folgt unmittelbar, daß ein Integralfeld $\mathfrak{F}$ alle elementaren Funktionen $p \cdot E$ enthalten muß, und mit den Integralpostulaten I bis IV schließt man, daß $J(p \cdot E) = p = I(p \cdot E)$ ist.

In besonderen Fällen kann das elementare System das einzige existierende Integrationssystem sein. Es sei z. B. $\mathfrak{R}$ die Menge der ganzen Zahlen, Γ ihre additive Gruppe und $E(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $E(0) = 1$. Die E-beschränkten Funktionen sind diejenigen, die nur für endlich viele x von 0 verschieden sind; gleichzeitig sind dies die elementaren Funktionen, so daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ gilt. Offensichtlich ist $(\mathfrak{E}, I)$ das einzige mögliche Integrationssystem.

V. Das absolute Integrationssystem.

In diesem Abschnitt wird wieder unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (3) des Existenzkriteriums erfüllt ist, ein weiteres spezielles System $(\mathfrak{T}, T)$ konstruiert, welches wir das *absolute Integrationssystem* nennen wollen. Die gewählte Bezeichnungsweise rechtfertigt sich durch die besonderen Eigenschaften, welche wir herleiten werden[6]).

Zunächst erklären wir einen nützlichen Hilfsbegriff: Unter einer *Auslegung* $a \cdot F$ einer Funktion F verstehen wir eine Funktion, welche sich in der Form

$$a \cdot F = \sum a_\nu F^{\alpha_\nu} \qquad [a = \sum a_\nu] \tag{7}$$

darstellen läßt (a_ν reelle Koeffizienten, $\alpha_\nu \in \Gamma$). Es handelt sich um die Ausdehnung der bereits mit (1) für E eingeführten Symbolik auf beliebige Funktionen $\mathfrak{F}$. Die Auslegung heißt *definit*, wenn $a_\nu \geqq 0$ (alle ν) und *normiert*, wenn $a = \sum a_\nu = 1$ ist.

Die Konstruktion des absoluten Systems vorbereitend definieren wir zwei Mengen reeller Zahlen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, die einer (E-beschränkten) Funktion F durch die folgenden Vorschriften zugeordnet sind:

a) $\mathfrak{P}$ sei die Menge aller p, für welche folgendes gilt: Es gibt eine geeignete gewählte definite und normierte Auslegung von F

$$1 \cdot F = \sum a_\nu F^{\alpha_\nu} \qquad [\sum a_\nu = 1;\ a_\nu \geqq 0] \tag{8a}$$

so, daß zu jeder Transformation $\tau \in \Gamma$ eine (im allgemeinen von τ abhängige) Auslegung von E

$$p \cdot E = \sum p_\nu E^{\xi_\nu} \qquad [\sum p_\nu = p] \tag{9a}$$

so existiert, daß

$$1 \cdot F^\tau = \sum a_\nu F^{\tau\alpha_\nu} \leqq p \cdot E \tag{10a}$$

ausfällt.

b) $\mathfrak{Q}$ sei die Menge aller q, für welche folgendes gilt: Es gibt eine geeignete gewählte definite und normierte Auslegung von F

$$1 \cdot F = \sum b_\mu F^{\beta_\mu} \qquad [\sum b_\mu = 1;\ b_\mu \geqq 0] \tag{8b}$$

so, daß zu jeder Transformation $\tau \in \Gamma$ eine (im allgemeinen von τ abhängige) Auslegung von E

$$q \cdot E = \sum q_\mu E^{\eta_\mu} \qquad [\sum q_\mu = q] \tag{9b}$$

so existiert, daß

$$1 \cdot F^\tau = \sum b_\mu F^{\tau\beta_\mu} \geqq q \cdot E \tag{10b}$$

ausfällt.

[6]) Im einfachern Fall abelscher Transformationsgruppen wurde die Konstruktion absoluter Integrationssysteme nach einem andern Prinzip (Zerlegungsgleichheit von Funktionen) durchgeführt. Vgl. A. KIRSCH, Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen, Math. Ann. **124**, 343—363 (1952); H. HADWIGER u. A. KIRSCH, Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit, Portugaliae Math. **11**, 57—67 (1952).

Im Hinblick darauf, daß F E-beschränkt ist, läßt sich leicht schließen, daß die beiden Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nichtleer sind.

Wir zeigen jetzt die Richtigkeit der folgenden Hilfsaussage:

(11) Aus $p \in \mathfrak{P}$, $q \in \mathfrak{Q}$ folgt $q \leq p$.

Beweis. (10a) läßt sich im speziellen Fall $\tau = \varepsilon$ (Identität) ausführlich als

(a) $$\sum_{\nu} a_\nu F^{\alpha_\nu} \leq \sum_{\nu} p_\nu E^{\xi_\nu}$$

schreiben. Setzen wir in (10b) $\tau = \alpha_\nu$, so ergibt sich, ebenfalls ausführlicher geschrieben

(b) $$\sum_{\mu} b_\mu F^{\alpha_\nu \beta_\mu} \geq \sum_{\mu} q_{\mu\nu} E^{\eta_{\mu\nu}}.$$

Hierbei wurde rechts durch einen zweiten Index die Abhängigkeit von ν angedeutet. Transformieren wir die Relation (a) mit β_μ, multiplizieren dann mit b_μ und summieren über μ, so ergibt sich

(a b) $$\sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu a_\nu F^{\alpha_\nu \beta_\mu} \leq \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu p_\nu E^{\xi_\nu \beta_\mu}.$$

Multipliziert man (b) mit a_ν und summiert anschließend über ν, so resultiert

(b a) $$\sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu b_\mu F^{\alpha_\nu \beta_\mu} \geq \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu q_{\mu\nu} E^{\eta_{\mu\nu}}.$$

Da die linken Seiten von (a b) und (b a) übereinstimmen, so ergibt sich durch Verbindung der beiden Relationen mit Rücksicht auf

$$p = \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu p_\nu \quad \text{und} \quad q = \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu q_{\mu\nu}$$

die Beziehung $q \cdot E \leq p \cdot E$ oder mit (3) $q \leq p$, w. z. b. w.

Wir führen nun zwei über der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ der E-beschränkten Funktionen F definierte Funktionale $\overline{T}(F)$ und $\underline{T}(F)$ ein:

Definition 5. *Für eine Funktion $F \in \mathfrak{B}$ sei*

(12a) $$\overline{T}(F) = \inf p \qquad [p \in \mathfrak{P}]$$

und

(12b) $$\underline{T}(F) = \sup q \qquad [q \in \mathfrak{Q}]$$

gesetzt, wobei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die beiden durch (8a u. b) *bis* (10a u. b) *erklärten Zahlenmengen sind. $\overline{T}(F)$ heißt absolutes Oberintegral, $\underline{T}(F)$ absolutes Unterintegral von F* [7]).

Zunächst sei bemerkt, daß die Existenz der in (12a u. b) rechts angesetzten Grenzzahlen im Hinblick auf (11) gewährleistet ist; gleichzeitig folgt

(13) $$\underline{T}(F) \leq \overline{T}(F).$$

Die gewählte Bezeichnungsweise rechtfertigt sich zum Teil durch die Gültigkeit von

[7]) Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß $\overline{T}(F)$ und $\underline{T}(F)$ im allgemeinen keine Integrale sind (vgl. 17a u. b).

Satz 2. *Ist die Funktion $F \in \mathfrak{B}$ im System $(\mathfrak{F}, J)$ integrierbar, d.h. ist $F \in \mathfrak{F}$, so gilt*

$$\underline{T}(F) \leq J(F) \leq \overline{T}(F). \tag{14}$$

Die beiden Funktionalwerte $\underline{T}(F)$ und $\overline{T}(F)$ stellen somit absolute, d.h. nur von den der gesamten Theorie gemeinsam zugrunde liegenden Gegebenheiten $\mathfrak{R}$, Γ und E abhängige Schranken für die der Funktion F in beliebigen individuellen Systemen zukommenden Integralwerte dar.

Der Beweis des oben formulierten Satzes ist sehr einfach: Für $p \in \mathfrak{P}$ gilt (10a) und mit (8a) und (9a) folgt mit Anwendung der Postulate I bis IV unmittelbar (a) $J(F) \leq p$. Analog schließt man mit $q \in \mathfrak{Q}$ über (10b), (8b) und (9b) auf (b) $J(F) \geq q$. Mit Rücksicht auf die Definitionen (12a u. b) resultiert (14), w. z. b. w.

Nachfolgend leiten wir für die absoluten Ober- und Unterintegrale $\overline{T}$ und $\underline{T}$ einige Eigenschaften her, die wir später verwenden müssen.

Zunächst ist leicht zu erkennen, daß die einer Funktion F mit den Festsetzungen (8a u. b) bis (10a u. b) zugeordneten Zahlmengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ dieselben bleiben, wenn F durch F^{α} ersetzt wird. Hieraus resultiert mit (12a u. b)

$$\overline{T}(F^{\alpha}) = \overline{T}(F); \qquad \underline{T}(F^{\alpha}) = \underline{T}(F). \tag{15}$$

Mühelos schließt man ferner auf

$$\overline{T}(aF) = a\overline{T}(F); \qquad \underline{T}(aF) = a\underline{T}(F) \quad [a \geq 0] \tag{16a}$$

$$\overline{T}(aF) = a\underline{T}(F); \qquad \underline{T}(aF) = a\overline{T}(F) \quad [a \leq 0]. \tag{16b}$$

Weiter gelten die Ungleichungen

$$\overline{T}(F+G) \leq \overline{T}(F) + \overline{T}(G) \tag{17a}$$

$$\underline{T}(F+G) \geq \underline{T}(F) + \underline{T}(G). \tag{17b}$$

In der Tat: Es sei $p \in \mathfrak{P}_F$ und $q \in \mathfrak{P}_G$. Nach (10a) gelten die Relationen

$$\sum_{\nu} a_{\nu} F^{\tau\alpha_{\nu}} \leq \sum_{\nu} p_{\nu} E^{\xi_{\nu}} \qquad [\sum a_{\nu} = 1; \quad \sum p_{\nu} = p] \tag{a}$$

$$\sum_{\mu} b_{\mu} G^{\tau\beta_{\mu}} \leq \sum_{\mu} q_{\mu} E^{\eta_{\mu}} \qquad [\sum b_{\mu} = 1; \quad \sum q_{\mu} = q]. \tag{b}$$

Die Auslegungen rechts können von τ abhängen. Die Transformation von (a) mit β_{μ}, Multiplikation mit b_{μ} und Summation über μ führt zu

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu} b_{\mu} a_{\nu} F^{\tau\alpha_{\nu}\beta_{\mu}} \leq \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_{\mu} p_{\nu} E^{\xi_{\nu}\beta_{\mu}}. \tag{a b}$$

Wird in (b) τ durch $\tau\alpha_{\nu}$ ersetzt, so ergibt die Multiplikation mit a_{ν} und Summation über ν

$$\sum_{\nu}\sum_{\mu} a_{\nu} b_{\mu} G^{\tau\alpha_{\nu}\beta_{\mu}} \leq \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_{\nu} q_{\mu\nu} E^{\eta_{\mu\nu}}, \tag{b a}$$

wobei rechts die Abhängigkeit von ν durch einen zweiten Index angedeutet ist

Werden die beiden Ungleichungen (a b) und (b a) addiert, so resultiert mit Rücksicht auf

$$\sum_{\tau}\sum_{\mu} a_\tau b_\mu = 1; \qquad \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu p_\nu = p; \qquad \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu q_{\mu\nu} = q$$

die Beziehung

$$1 \cdot (F+G)^\tau \leq (p+q)\cdot E, \tag{c}$$

wobei die Auslegung rechts von τ abhängig ist.

Mit (c) schließen wir auf $p+q \in \mathfrak{P}_{F+G}$, wobei wieder die Erklärungen (8a u. b) bis (10a u. b) berücksichtigt werden müssen und mit Definition (12a) resultiert zunächst $\overline{T}(F+G) \leq p+q$, und sodann wieder mit (12a) die Behauptung (17a).

Der Nachweis von (17b) verläuft analog.

Sehr einfach ist die Verifikation von

$$\overline{T}(E) = \underline{T}(E) = 1. \tag{18}$$

Schließlich zeigen wir noch, daß

$$\underline{T}(F) \geq 0 \qquad [F \geq 0] \tag{19}$$

gilt. In der Tat: Da (10b) in diesem Fall für $q=0$ mit $0 \cdot E = 0$ $E=0$ jedenfalls befriedigt wird, folgt mit Definition (12b) die Behauptung (19).

Die Hilfsfunktionale $\underline{T}(F)$ und $\overline{T}(F)$ und ihre soeben abgeleiteten einfachsten Eigenschaften dienen uns nun dazu, das absolute Integrationssystem zu begründen.

Zunächst formulieren wir

Definition 6. *Eine Funktion $F \in \mathfrak{B}$ heißt absolut integrierbar, wenn*

$$\overline{T}(F) = \underline{T}(F) \tag{20}$$

ausfällt, d.h. wenn das absolute Oberintegral mit dem absoluten Unterintegral übereinstimmt.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$ der absolut integrierbaren Funktionen ist ein Integralfeld. In der Tat können die Feldpostulate I^0 bis III^0 mit (15), (16a u. b) (17a u. b) und (18) unmittelbar bestätigt werden.

Definition 7. *Das absolute Integrationssystem $(\mathfrak{T}, T)$ entsteht durch Zusammenfassung des Integralfeldes $\mathfrak{T}$ der absolut integrierbaren Funktionen F und des auf $\mathfrak{T}$ definierten Integrals*

$$T(F) = \overline{T}(F) = \underline{T}(F). \tag{21}$$

Es ist noch zu bestätigen, daß $T(F)$ ein Integral ist. In der Tat lassen sich die Integralpostulate I bis IV auf einfachste Weise aus (15), (16a u. b), (17a u. b), (18) und (19) herleiten.

Es ist klar, daß dem absoluten Integrationssystem im Rahmen der axiomatischen Theorie der invarianten Integration eine besondere Bedeutung zukommt[8]).

Die vielleicht markanteste Besonderheit des absoluten Systems ist dadurch gegeben, daß die absolut integrierbaren Funktionen die Eigenschaft aufweisen, daß der Integralwert, der ihnen in irgendwelchen individuellen Systemen zukommt, immer der gleiche sein muß, nämlich der Wert des absoluten Integrals. Dies drücken wir noch genauer aus mit dem folgenden

Satz 3. *Ist eine absolut integrierbare Funktion $F \in \mathfrak{T}$ im System $(\mathfrak{F}, J)$ integrierbar, d.h. ist auch $F \in \mathfrak{F}$, so gilt*

$$J(F) = T(F). \tag{22}$$

Es handelt sich hier offensichtlich nur um ein Korollar zu Satz 2.

VI. Invariante Integration in Gruppen.

Wir betrachten jetzt den besonders einfachen, aber wichtigen Fall, wo der Raum $\mathfrak{R}$ eine Gruppe und Γ die Gruppe der linksseitigen[9]) Transformationen von $\mathfrak{R}$ ist: Jedem $\alpha \in \mathfrak{R}$ wird die Transformation $x \to \alpha\, x$ $(x \in \mathfrak{R})$ zugeordnet. Als Einheitsfunktion wählen wir $E \equiv 1$[10]).

Verschiedene Begriffe, die oben im Rahmen der allgemeineren Theorie erklärt worden sind, werden in dem hier vorliegenden speziellen Fall wesentlich vereinfacht.

So ist eine Auslegung der Einheitsfunktion nach (1) eine Konstante, d.h. es gilt

$$p \cdot E = p\,E = p. \tag{23}$$

Eine E-beschränkte Funktion ist (im üblichen Sinn) beschränkt und $\mathfrak{B}$ ist die Mannigfaltigkeit der über $\mathfrak{R}$ definierten beschränkten Funktionen.

Eine besonders wichtige Feststellung: In unserem Sonderfall ist das Existenzkriterium erfüllt, indem die Bedingung (3) im Hinblick auf (23) trivial befriedigt ist.

Das elementare Integrationssystem $(\mathfrak{E}, I)$ wird selbst trivial: $\mathfrak{E}$ umfaßt die über $\mathfrak{R}$ konstanten Funktionen $F = p$ und es ist dann $I(F) = p$.

---

[8]) Es soll hier auch auf einen Zusammenhang mit der absoluten Meßbarkeit einer Punktmenge im Sinne von TARSKI hingewiesen werden [vgl. A. TARSKI, Über das absolute Maß linearer Punktmengen. Fund. Math. **30**, 218—234 (1938)]: Es sei $R = \Gamma$ die additive Gruppe der reellen Zahlen x und E sei die charakteristische Funktion des Einheitsintervalles $0 \leq x \leq 1$. Eine beschränkte lineare Punktmenge ist dann und nur dann im TARSKIschen Sinn absolut meßbar, wenn ihre charakteristische Funktion in unserm Sinne integrierbar ist. Dieser an sich plausible Sachverhalt sei hier ohne Beweis mitgeteilt.

[9]) Wir beschränken uns aus formalen Gründen auf die linksseitigen Transformationen. Der rechtsseitige Fall läßt sich genau gleich durchführen.

[10]) Es handelt sich um denjenigen Sonderfall, in welchem die konstruktiven Ideen von J. VON NEUMANN zum Aufbau eines invarianten Maß- und Integrationssystems in Gruppen am einfachsten und gleichzeitig am vollkommensten zur Wirkung gebracht worden sind. Vgl. J. VON NEUMANN, Zur allgemeinen Theorie des Maßes. Fund. Math. **13**, 73—116 (1929). — Zum HAARschen Maß in topologischen Gruppen. Comp. Math. **1**, 106—114 (1934).

Interessantere Aspekte zeigt das absolute Integrationssystem $(\mathfrak{T}, T)$; die Konstruktion des absoluten Ober- und Unterintegrals gemäß (8a u. b) bis (10a u. b) und (12a u. b) ist im Hinblick auf (23) viel einfacher zu übersehen und darzustellen:

Eine definite und normierte Auslegung von F ist eine Funktion der Form

$$1 \cdot F = \sum a_\nu F(\alpha_\nu x) \qquad [a_\nu \geq 0,\ \sum a_\nu = 1] \tag{24a}$$

die entsprechende Auslegung von F^τ ist

$$1 \cdot F^\tau = \sum a_\nu F(\tau \alpha_\nu x). \tag{24b}$$

Definition 5 gestattet die gekürzte Fassung

$$\overline{T}(F) = \inf p \qquad [1 \cdot F^\tau \leq p], \tag{25a}$$

$$\underline{T}(F) = \sup q \qquad [1 \cdot F^\tau \geq q], \tag{25b}$$

wobei die rechts stehenden Abschrankungen bei einer fest gewählten Auslegung $1 \cdot F$ für alle $\tau \in \Gamma$ gelten sollen, und die Ermittlung des Infimums bzw. des Supremums über alle p bzw. q ausgedehnt ist, für welche solche Abschrankungen existieren.

Offensichtlich umfaßt nun $\mathfrak{T}$ diejenigen beschränkten Funktionen F, für welche es eine Zahl r

$$r = \inf p = \sup q = T(F) \tag{26}$$

so gibt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine definite und normierte Auslegung $1 \cdot F$ so existiert, daß für alle τ

$$|1 \cdot F^\tau - r| < \varepsilon \tag{27}$$

ausfällt.

Es handelt sich, wie man sieht, um die Funktionen, welche einen Mittelwert im Sinne von J. von Neumann aufweisen oder auch, was damit gleichbedeutend ist, im Sinne von W. Maak[11]) (stark) ergodisch sind.

Wir haben also den

Satz 4. *Eine beschränkte Funktion F über einer Gruppe ist dann und nur dann absolut integrierbar, wenn sie ergodisch ist, d.h. es gilt $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$ und*

$$T(F) = M(F), \tag{28}$$

wenn $\mathfrak{M}$ die Mannigfaltigkeit der ergodischen Funktionen F und $M(F)$ den Mittelwert von F bezeichnen.

Aus diesem Satz lassen sich Schlüsse über die absolute Integrierbarkeit verschiedener bedeutsamer Klassen von Funktionen ziehen.

[11]) Diese Bezeichnung wurde im Anschluß an Untersuchungen von R. Godement [Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948)] eingeführt und die Bedeutung des Begriffs wurde durch W. Maak [Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine angew. Math. **190**, 34—48 (1952)] besonders erkannt und herausgearbeitet. Die Begriffsbildungen sind in der Maakschen Theorie etwas differenzierter, was zum Teil damit zusammenhängt, daß sie sich allgemeiner auf (komplexwertige) Funktionen auf Halbgruppen beziehen.

So sind bekanntlich die (im Sinne von J. VON NEUMANN und W. MAAK fastperiodischen Funktionen über Γ ergodisch[12]). Es folgt also, daß ein *fastperiodische* Funktion absolut integrierbar ist.

Ist weiter Γ eine kompakte topologische Gruppe, so ist, wie bereits J. VON NEUMANN nachwies, jede stetige Funktion ergodisch[13]). Also ist eine *stetig* Funktion absolut integrierbar.

VII. Das Existenzproblem.

Die dem vorstehenden Abschnitt zugrunde gelegte sehr spezielle Sachlage zeigte die Besonderheit, daß die Existenzfrage auf triviale Weise bejaht werden konnte. Auch in mannigfaltigen anderen Sonderfällen, die mit bekannten, zum Teil auch klassischen Systemen in engem Zusammenhang stehen, läßt sich die Existenz leicht nachweisen.

Es ist ein charakteristisches Merkmal der hier skizzierten Theorie, daß versucht wird, auch den allgemeinsten Fall einer im abstrakten Raum $\mathfrak{R}$ völlig willkürlich definierten Einheitsfunktion E zu erfassen. Die Frage, ob Integrationssysteme existieren oder nicht, hängt im weiteren dann noch wesentlich von der im Raum wirkenden Transformationsgruppe Γ ab.

Wohl haben wir im dritten Abschnitt ein notwendiges und hinreichendes Existenzkriterium begründet. Es zeigt sich aber, daß es im allgemeinen nicht leicht zu entscheiden ist, ob dieses erfüllt ist oder nicht.

Untersuchungen, welche sich auf die Frage der Gültigkeit des Existenzkriteriums beziehen, stellen Beiträge zur Lösung des allgemeinen Existenzproblems dar; im vorliegenden Abschnitt werden einige erste Schritte in dieser Richtung getan.

Zunächst wollen wir hier nochmals das bereits oben angegebene *Existenzkriterium* in Erinnerung rufen:

Notwendig und *hinreichend* für die Existenz eines Integrationssystems ist die Bedingung, daß aus $p \cdot E \geq 0$ $p \geq 0$ folgt.

Das wichtigste hier erzielte Ergebnis wird ausgedrückt mit dem folgenden

Satz 5. *Das Existenzkriterium ist erfüllt, wenn die Transformationsgruppe Γ abelsch ist.*

Beweis. Da die positive Einheitsfunktion E nicht identisch verschwindet, gibt es ein $x_0 \in \mathfrak{R}$ so, daß $E(x_0) > 0$ ist. Es sei nun

$$\text{(a)} \qquad p \cdot E = \sum_1^n p_\nu E(\alpha_\nu x) \geq 0 \qquad \left[p = \sum_1^n p_\nu\right]$$

die im Kriterium genannte positive Auslegung von E. Hierbei sind, wie ersichtlich, die n Transformationen $\alpha_\nu \in \Gamma$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ beteiligt. Es sei $k \geq 0$ ganz und es bezeichne W_k die Menge aller n-Tupel ganzer Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$

[12]) Vgl. MAAK, W.: Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen. Abh. math. Seminar Hans. Univ. **11**, 240—244 (1936); insb. den Mittelwertsatz S. 243.

[13]) Vgl. z. B. die Darstellung bei L. PONTRJAGIN, Topological groups, Princeton 1939, § 25, S. 91—99.

welche der Beschränkung $-k \leqq \varrho_i \leqq k$ $(i = 1, \ldots, n)$ unterliegen. Wir setzen

(b) $$H_k^\nu = \sum_{W_k} E(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} \alpha_\nu x_0),$$

wobei wie angedeutet die Summation über alle Exponentensätze erstreckt werden soll, die zu W_k gehören. Ferner sei

(c) $$H_k = \sum_{W_k} E(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} x_0).$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt mit Rücksicht darauf, daß Γ abelsch ist, für $k = 1, 2, \ldots$

(d) $$H_{k-1} \leqq H_k^\nu \leqq H_{k+1} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Da E beschränkt ist, gilt mit einem geeigneten $c > 0$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ $E(x) \leqq c$ und mit (c) schließt man, daß

(e) $$H_k \leqq c(2k+1)^n$$

gelten muß.

Wir behaupten jetzt, daß zu jedem $\omega > 1$ eine natürliche Zahl i existiert, so daß

(f) $$H_{i+1} < \omega H_{i-1}$$

gilt. Andernfalls würde für ein bestimmtes $\omega > 1$ und für alle $k = 1, 2, \ldots$ stets $H_{k+1} \geqq \omega H_{k-1}$ gelten, woraus aber $H_{2k} \geqq \omega^k H_0$ gefolgert werden könnte, was wegen $H_0 = E(x_0) > 0$ mit (e) unverträglich ist.

Wir bilden nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu H_i^\nu = \sum_{W_i} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu E(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} \alpha_\nu x_0).$$

Der Ausdruck rechts läßt sich auch als

$$\sum_{W_i} G(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} x_0)$$

schreiben, wobei $G = p \cdot E$ gesetzt ist; wegen $p \cdot E \geqq 0$ folgt so

(g) $$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu H_i^\nu \geqq 0 \qquad \left[\sum_{\nu-1}^{n} p_\nu = p\right].$$

Wegen $H_i^\nu = H_{i-1} + (H_i^\nu - H_{i-1})$ ergibt sich mit (g) weiter

$$p H_{i-1} + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu (H_i^\nu - H_{i-1}) \geqq 0,$$

und mit (d) wenn P so gewählt wird, daß $|p_\nu| \leqq P$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$ ausfällt, auch

(h) $$p H_{i-1} \geqq -P \sum_{\nu=1}^{n} (H_i^\nu - H_{i-1}).$$

Mit Rückblick auf (d) und (f) folgert man

$$0 \leqq H_i^\nu - H_{i-1} \leqq H_{i+1} - H_{i-1} < (\omega - 1) H_{i-1},$$

so daß sich mit (h) schließlich

(i) $$p > -P n(\omega - 1)$$

ergibt. Da (i) für jedes $\omega > 1$ richtig ist, folgt so

$$p \geqq 0. \tag{k}$$

Damit ist verifiziert, daß die Bedingung des Kriteriums erfüllt wird, w. z. b. w

Die folgenden Nebenergebnisse beziehen sich auf Fälle nichtabelsche Transformationsgruppen Γ, wobei aber ein einfacher Nachweis, daß da Existenzkriterium erfüllt ist, zufolge besonderer Verhältnisse ermöglicht wird So gilt z. B.

Aussage A. *Besitzt Γ eine (eigentliche oder uneigentliche) Untergruppe Ω so, daß die durch Summation über alle $\omega \in \Omega$ gebildete (nicht notwendig E-be schränkte) Funktion*

$$H = \sum E^{\alpha\omega} \tag{28}$$

für jedes $\alpha \in \Gamma$ existiert und nicht von α abhängt, so ist das Existenzkriterium erfüllt.

In der Tat: Es sei $p \cdot E = \sum p_\nu E^{x_\nu}$ mit $p = \sum p_\nu$ und es werde $p \cdot E \geqq 0$ vorausgesetzt. Dann ist auch $\sum (p \cdot E)^\omega = pH \geqq 0$. Da nun wegen $E \geqq 0$ sicher auch $H \geqq 0$, $H \not\equiv 0$ gilt, folgt $p \geqq 0$, w. z. b. w.

Einfache Fälle, die nach Aussage A entschieden werden können, sind etwa

a) Es sei $\mathfrak{R}$ der k-dimensionale euklidische Raum ($k \geqq 2$) und Γ die Be wegungsgruppe in $\mathfrak{R}$. Ferner sei E die charakteristische Funktion einer end lichen Menge von m Punkten. Wählen wir für Ω die Translationsgruppe in $\mathfrak{R}$ so ist die Voraussetzung von Aussage A mit $H = m$ erfüllt.

b) Es sei $\mathfrak{R}$ wieder der k-dimensionale euklidische Raum und Γ sei ein nichtabelsche kristallographische Gruppe, ferner E die charakteristische Funk tion einer beschränkten Punktmenge. Mit $\Gamma = \Omega$ ist die Voraussetzung vo Aussage A erfüllt.

Es gilt ferner:

Aussage B. *Besitzt Γ eine (eigentliche oder uneigentliche) abelsche Unter gruppe Ω mit der Eigenschaft, daß zu jedem $\lambda > 1$ eine Funktion $W \geqq 0$, $W \not\equiv 0$ existiert, von der für jedes $\alpha \in \Gamma$ mit zwei geeigneten Zahlen u und v, welche de Bedingungen $0 < v \leqq u$ und $u < \lambda v$ unterliegen, zwei Auslegungen $u \cdot W$ un $v \cdot W$ nach der Untergruppe Ω so gebildet werden können, daß*

$$u \cdot W \geqq E^\alpha \geqq v \cdot W \tag{29}$$

gilt, so ist das Existenzkriterium erfüllt.

In der Tat: Es sei

$$r \cdot E = \sum p_\nu E^{x_\nu} - \sum q_\mu E^{\beta_\mu} \qquad [\alpha_\nu, \beta_\mu \in \Gamma]$$

mit $p_\nu \geqq 0$, $q_\mu \geqq 0$, $p = \sum p_\nu$, $q = \sum q_\mu$ und $r = p - q$, und es werde $r \cdot E \geqq 0$ vorausgesetzt.

Bezeichnen $(u \cdot W)_\nu$ bzw. $(v \cdot W)_\mu$ die in (29) eingesetzten Auslegunge von W, die den Funktionen E^{x_ν} bzw. E^{β_μ} zugeordnet sind, so gilt zunächs

$$0 \leqq r \cdot E \leqq \sum p_\nu (u \cdot W)_\nu - \sum q_\mu (v \cdot W)_\mu,$$

oder — wenn der Ausdruck rechts als Auslegung von W nach Ω interpretiert wird — $0 \leqq (u\,p - v\,q) \cdot W$. Da aber Ω abelsch ist, folgt nach Satz 5, daß $u\,p - v\,q \geqq 0$ sein muß. Mit Rückblick auf die Bedingungen für u und v folgt so zunächst $\lambda\,p - q \geqq 0$ und wegen der Gültigkeit für alle $\lambda > 1$ schließlich $p - q = r \geqq 0$, w. z. b. w.

Die Voraussetzung der Aussage B drückt eine gewisse Kommensurabilität aller $E^\varkappa[\alpha \in \Gamma]$ unter sich nach einer abelschen Untergruppe aus.

Ein Fall, der nach dieser Aussage B entschieden werden kann, ist der klassische:

c) Es sei $\mathfrak{R}$ der k-dimensionale euklidische Raum, Γ die Bewegungsgruppe in $\mathfrak{R}$, Ω die Translationsgruppe in $\mathfrak{R}$, E die charakteristische Funktion eines halbabgeschlossenen Einheitswürfels in achsenorientierter Lage. Die Voraussetzung der Aussage B wird erfüllt, wenn man bei vorgegebenem $\lambda > 1$ für W die charakteristische Funktion des halbabgeschlossenen Würfels in achsenorientierter Lage von der Seitenlänge $1/m$ mit ausreichend großem m wählt.

Bern (Schweiz), Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 5. April 1954.)

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 320—327 (1954)

Über eine Eigenschaft der Kugel.

Von

IVAN VIDAV.

1. Betrachten wir die Gesamtheit solcher geschlossener Rotationsflächen auf denen mindestens ein Punkt M existiert von der Eigenschaft, daß jede auf der Fläche liegende, von M ausgehende Kurve, die sich einmal um die Fläche windet und wieder in den Meridian von M einmündet, mindestens die Länge 2π hat. Unter allen solchen Flächen sei jene von der kleinsten Oberfläche zu bestimmen.

Mit σ werde der Bogen auf dem Meridian der Rotationsfläche bezeichnet. Das Quadrat des Bogenelements

$$ds^2 = d\sigma^2 + r^2\, d\varphi^2$$

kann auch in der Form

$$(*) \qquad ds^2 = r^2(u)\,(d\varphi^2 + du^2)$$

geschrieben werden, wenn wir $du = d\sigma/r$ setzen, worauf dann $r = r(u)$ eine Funktion des Parameters u wird.

In den beiden Punkten, wo $r = 0$ ist, ist $u = \pm\infty$ wegen $|u| \geqq \int dr/r = \log r$. Bei einer geschlossenen Rotationsfläche durchläuft der Parameter u wachsend alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$. Der Anfangsmeridian $\varphi = 0$ gehe durch den Punkt M, wo auch $u = 0$ sein soll. Nach der Formel (*) ist die ganze Fläche in die Ebene (φ, u) konform abgebildet auf den Streifen $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$. Der Parallelkreis $u = 0$ durch M, der auf das Intervall $(0, 2\pi)$ der Achse (φ) abgebildet wird, wobei die Endpunkte $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ die Bilder des Punktes M sind, teilt die Fläche in zwei Teile, von denen jener Teil als der obere bezeichnet werden soll, der dem Halbstreifen $0 \leqq u < +\infty$ entspricht. Die Oberfläche dieser Hälfte beträgt

$$(1) \qquad P = 2\pi \int_0^{\infty} r^2(u)\, du.$$

Das Bild einer Kurve, die von M ausgehend die Rotationsfläche einmal umwindet und wieder irgendwo in den Anfangsmeridian einmündet, verläuft im Streifen und verbindet den Anfangspunkt $(0, 0)$ mit einem Punkt der Geraden $\varphi = 2\pi$. Die Gleichung einer solchen Kurve lautet $u = u(\varphi)$, wenn die Funktion $u(\varphi)$ für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ definiert ist, und es ist $u(0) = 0$. Wenn überall $u(\varphi) \geqq 0$ ist, so liegt die Kurve im oberen Teil und hat die Länge

$$(2) \qquad L = \int_0^{2\pi} r(u)\, \sqrt{1 + u'^2}\, d\varphi.$$

Das Problem lautet jetzt:

Unter allen stetigen und positiven Funktionen $r(u)$ von der Eigenschaft, daß jede Kurve, die den Anfangspunkt $(0, 0)$ mit irgendeinem Punkt der Geraden $\varphi = 2\pi$ verbindet und dem Integral L einen Wert $\geq 2\pi$ gibt, soll jene gefunden werden, für die das Integral (1) *ein Minimum wird.*

Es steht zu erwarten, daß dieses Integral eben dann den kleinsten Wert hat, wenn die Funktion $r(u)$ so bestimmt ist, daß L auf jeder Extremale, die $(0, 0)$ mit einem Punkt der Geraden $\varphi = 2\pi$ verbindet, genau den Wert 2π hat.

Zur Lösung führt uns der folgende Satz:

Es sei $F(Y)$ eine für $Y \geq 0$ gegebene positive zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Bedingungen $F(0) = 0$, $F''(Y) \geq 0$ genügt. Ferner sei $Y(y)$ eine solche stetige positive Funktion, für die

$$S = \int_0^1 Y(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \geq 1 \tag{3}$$

ist für jede auf $0 \leq x \leq 1$ differenzierbare Funktion $y = y(x)$ mit $y(0) = 0$ und $y(x) \geq 0$. Unter diesen Umständen gilt für das Integral

$$I[F(Y)] \equiv \int_0^\infty F[Y(y)]\, dy \geq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(Y)\, dY}{Y \sqrt{1 - Y^2}} \tag{I}$$

und es wird die Gleichheit nur für die Funktion $Y = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y$ erreicht, wenn nicht gerade $F''(Y) \equiv 0$ ist für $0 \leq Y \leq \alpha$, wobei $\alpha > 0$.

Im speziellen Falle, wenn $F(Y) = Y^2$ genommen und $\varphi = 2\pi x$, $u = 2\pi y$, $Y(y) = r(u)$ gesetzt wird, ergibt sich in der Tat

$$2\pi \int_0^\infty r^2(u)\, du \geq 8\pi \tag{4}$$

für jede Funktion $r(u)$, für die $L \geq 2\pi$ ist. Das Gleichheitszeichen gilt hier nur für $r(u) = 1/\cosh \frac{u}{4}$. Die dazugehörige Rotationsfläche, bei der das Integral (1) das Minimum erreicht, hat die Gleichung

$$z = \int_0^r \sqrt{\frac{15 + r^2}{1 - r^2}}\, dr, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Diese Fläche, deren konstantes Gausssches Krümmungsmaß $K = 1/16$ ist, erhalten wir, wenn wir *die Kugel vom Radius $R = 4$ entlang zweier zueinander senkrechten Meridiane aufschneiden, den erhaltenen vierten Teil der Kugel zu einer Rotationsfläche zusammenbiegen und die beiden Meridiane zusammenkleben.* Jede geodätische Linie, die von einem Punkt des Äquators ausgeht, die Fläche einmal umwindet und wieder im Anfangsmeridian endigt, hat die Länge 2π.

Wenn die Frage so abgeändert wird, daß auf der Rotationsfläche die Länge jeder Kurve, die den Punkt M mit einem Punkt *des senkrechten Meridians* verbindet, immer mindestens die Länge $\frac{1}{2}\pi$ haben soll, dann ergibt *die Kugel vom Radius* $R=1$ *die kleinste Oberfläche.*

Das Problem ist nämlich das frühere, nur die Breite des Streifens in der (φ, u)-Ebene ist jetzt $\frac{1}{2}\pi$. In diesem Fall ergibt sich das Extrem für $r(u) = 1/\cosh u$ und die Rotationsfläche ist die Einheitskugel.

2. Beweis der Ungleichung I. Es sei $Y(y)$ eine solche positive stetige Funktion, für die das Integral $I[F(Y)]$ einen Sinn hat, und für die $S \geq 1$ ist für jede Kurve, die den Ursprung O mit einem Punkt der Geraden AB verbindet (Fig. 1). Dann ist offenbar $Y(0) = K \geq 1$. Die Differentialgleichung der Extremalen für das Integral (3) lautet

$$Y(y) = C\sqrt{1+y'^2}.$$

Daraus folgt

$$x(y) = \int_0^y \frac{C\,dy}{\sqrt{Y^2(y) - C^2}} \tag{5}$$

als Gleichung der Extremale durch den Punkt O. Es sei C eine Konstante, $0 \leq C \leq K$. Mit η werde das kleinste y bezeichnet, das der Gleichung $Y(\eta) = C$ genügt, so daß also $Y(y) > C$ ist für $y < \eta$. So ein η existiert bei jedem $C \neq 0$, denn es darf $\liminf Y(y) = 0$ für $y \to \infty$ vorausgesetzt werden[1]). Schreiben wir $\xi = x(\eta)$, dann ist im Punkte V mit den Koordinaten ξ, η die Tangente mit der Achse (x) parallel. Hier sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. $\xi \leq 1$. In diesem Fall (Fig. 1) liegt der Punkt V im Inneren oder am Rande des Streifens $0 \leq x \leq 1$. Das Integral S, wenn es von O bis V entlang der Extremale erstreckt wird, von V aus aber längs der Parallelen mit der (x)-Achse bis zum Punkte T auf AB, muß mindestens den Wert 1 haben. Da nun dieser Wert von O bis V

$$\frac{1}{C}\int_0^\xi Y^2(y)\,dx = \int_0^\eta \frac{Y^2(y)\,dy}{\sqrt{Y^2(y) - C^2}}$$

beträgt, von V bis T jedoch $Y(\eta)(1-\xi) = C(1-\xi)$, so gibt die Berücksichtigung von (5) die Ungleichung

$$\int_0^\eta \sqrt{Y^2(y) - C^2}\,dy + C \geq 1. \tag{6}$$

[1]) Es ist $\liminf Y(y) = Y_0 \geq 0$. Wegen der Konvergenz des Integrals $I[F(Y)]$ muß, wenn $Y_0 > 0$, auf dem Intervall $0 \leq Y \leq Y_0$ überall $F(Y) = 0$ sein. Wenn $Y_0 \geq 1$, ist die Ungleichung (I) offenbar richtig. Für $Y_0 < 1$ bekommen wir aus (13):

$$\int_0^\infty F\left(\left|Y^2 - Y_0^2\right|\right) dy \geq \frac{2}{\pi}\int_{Y_0}^1 \frac{F(Y)\,dY}{Y\sqrt{1-Y^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(Y)\,dY}{Y\sqrt{1-Y^2}}.$$

Da $F(Y)$ nirgends fallend ist, so ist $I[F(Y)] = \int_0^\infty F(Y)\,dy \geq \int_0^\infty F\left(\sqrt{Y^2 - Y_0^2}\right) dy$ und es besteht auch in diesem Fall die Ungleichung (I).

2. $\xi > 1$. In diesem Fall könnte sogar $\xi = \infty$ werden. Nun werde $\eta_1 < \eta$ so gewählt, daß $1 < x(\eta_1) = \xi_1 < \infty$. Mit V_1, V', T bezeichnen wir die Punkte mit den Koordinaten (ξ_1, η_1), (ξ_1, η), $(1, \eta)$ (Fig. 2). Endlich sei T' der Punkt, wo die Extremale den Halbstrahl AB durchstößt. Da $Y(y) > C = Y(\eta)$ für jeden Punkt auf $T'V_1$ gilt, so ist der Wert des Integrals S entlang des Bogens $T'V_1$ größer als auf der Strecke TV'. Deshalb gilt für jedes solche η_1:

$$\int_0^{\eta_1} \left| Y^2 - C^2 \right| dy + C \geq 1 .$$

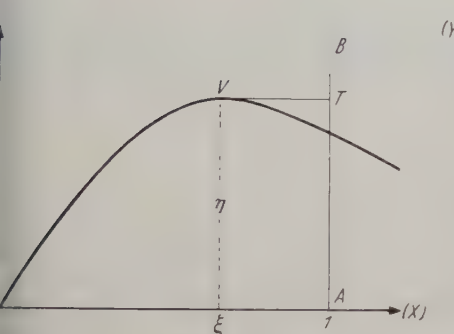

Fig. 1.

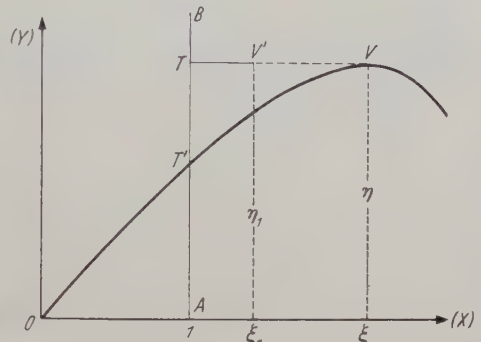

Fig. 2.

Links kann hierin η_1 beliebig gegen η rücken, weil das Integral stetig von einer oberen Grenze abhängt. Im Grenzfall gilt die Ungleichung um so mehr, so daß in beiden Fällen die Ungleichung (6) besteht.

Schreiben wir

$$\int_0^{\eta} \sqrt{Y^2(y) - C^2}\, dy = p(C), \qquad C = Y(\eta). \tag{7}$$

Da die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, ist dieses Integral stets positiv; wenn $0 \leqq C \leqq 1$, so ist es nach (6) sogar $\geqq 1 - C$. Setzt man also $p_1(C) = p(C) - (1 - C)$, wenn $0 \leqq C \leqq 1$ ist, jedoch $p_1(C) = p(C)$ für $1 < C \leqq K$, so ist $p_1(C)$ immer positiv.

Welchen Verlauf hat nun das Integral $p(C)$? Wenn $Y(y)$ monoton fällt, ist $p(C)$ offenbar stetig. Im allgemeinen Falle ist jedoch $p(C)$ nur linkerseits stetig, rechterseits kann es einen positiven Sprung haben. Dies erkennt man daraus, daß $p(C)$ die gleichen Eigenschaften hat wie die obere Grenze $\eta(C)$, die als Funktion von C so bestimmt ist, daß es die kleinste Wurzel von $Y(\eta) = C$ ist. Offenbar ist $p(C)$ integrabel.

Betrachten wir nun das folgende Doppelintegral

$$\iint_D G(C^2 - c^2) \sqrt{Y^2(y) - C^2} \cdot C\, dC\, dy . \tag{8}$$

Das Integrationsgebiet D möge in der (C, y)-Ebene begrenzt sein durch die (C)-Achse, ferner durch die Parallele $C = c$ zur (y)-Achse und durch die Kurve $C = Y(y)$ vom Punkte $(K, 0)$ beginnend bis zum Punkte, wo die

Kurve zum ersten Male die Gerade $C=c$ durchsetzt (Fig. 3). Hier ist irgendein Wert zwischen 0 und K. $G(t)$ sei einstweilen irgendeine positiv integrable Funktion. Die Parallele mit der Achse (y) durchsetze im Punkt $y=\eta$ zum ersten Male die Kurve $C=Y(y)$, so daß dieses η genau das frühere ist.

Integrieren wir zuerst nach y bei gegebener festgehaltener Integrations variablen C. Sind $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ die Abszissen der Punkte, wo die Parallel zur (y)-Achse aus dem Integrationsgebiet heraustritt oder in dasselbe eintrit dann haben wir

$$\int_0^{\eta} \sqrt{Y^2 - C^2}\, dy + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{Y^2 - C^2}\, dy + \cdots, \tag{9}$$

wenn wir nur jene Faktoren des Integranden in (8) hinschreiben, die von abhängen. In (9) bezeichnen wir die Summe der allfälligen Integrale, di

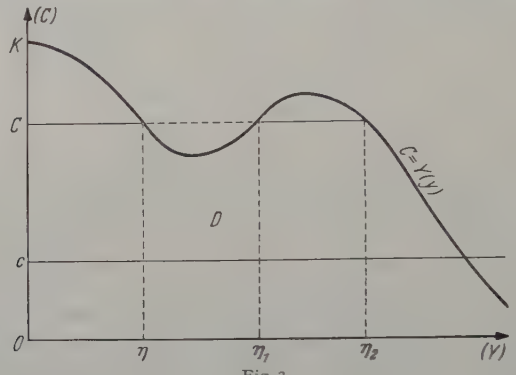

Fig. 3.

dem ersten nachfolgen, kurz mit $p_2(C)$. Offenbar ist $p_2(C) \geqq 0$, wobei da Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die Parallele zur Achse (y) nur einma im Felde D die Kurve $C=Y(y)$ trifft. Das erste der Integrale (9) wurde obe mit $p(C)$ bezeichnet. Aus diesem Grunde drückt sich das Integral (8) fo gendermaßen aus:

$$\int_c^K [p(C) + p_2(C)]\, G(C^2 - c^2)\, C\, dC. \tag{10}$$

Der Einfachheit halber wurde hier angenommen, daß überall $Y(y) \leqq K$ is Diese Beschränkung ist nicht wesentlich; allgemein hätte man in (10) a obere Grenze des Integrals $\max Y(y)$, wobei jedoch für $K \leqq C \leqq \max Y($ offenbar $p(C) \equiv 0$ zu setzen wäre.

Zweitens integrieren wir zunächst nach C. Weil bei festem y für C d Grenzen c und $Y(y)$ sind, so haben wir

$$\int_c^{Y(y)} \sqrt{Y^2 - C^2}\, G(C^2 - c^2)\, C\, dC.$$

Zur Abkürzung werde $Y^2 - c^2 = V$ und $C^2 - c^2 = t$ gesetzt. Dieses Integr bekommt nun die Form

$$\tfrac{1}{2} \int_0^V G(t) \sqrt{V - t}\, dt \qquad \left[= F\left(\sqrt{V}\right)\right]. \tag{11}$$

Die Funktion $G(t)$ versuchen wir jetzt so zu bestimmen, daß das Integral zu $F(V^{\frac{1}{2}})$ wird. Die bekannte Abelsche Methode zur Auflösung solcher Integralgleichungen führt zum Ausdruck

$$G(t) = \frac{1}{\pi t} \int_0^t \frac{F''(\sqrt{\tau})\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{12}$$

Weil die Stetigkeit der zweiten Ableitung $F''(Y)$ gefordert wurde, ist auch das Produkt $t^{\frac{1}{2}} \cdot G(t)$ stetig, und wegen der Eigenschaft $F''(Y) \geqq 0$ ist wirklich überall $G(t) \geqq 0$. Das so bestimmte $G(t)$ genügt der Gl. (11) nur, wenn $F'(0) = 0$ ist. Allgemein bekommt man für das Integral (11) den Wert $F(V^{\frac{1}{2}}) - V^{\frac{1}{2}} \cdot F'(0)$. Bei der so gewählten Funktion $G(t)$ lautet also das Doppelintegral (8)

$$\int_0^Y F\left(\sqrt{Y^2 - C^2}\right) - \sqrt{Y^2 - c^2} \cdot F'(0)\, dy.$$

Die obere Grenze ist hier die kleinste Wurzel von $Y(y) = c$. Daraus bekommt man mit Rücksicht auf (7)

$$\begin{cases} \int_0^y F\left(\sqrt{Y^2 - c^2}\right) dy = p(c) F'(0) + \int_c^K [p(C) + p_2(C)]\, G(C^2 - c^2)\, C\, dC \\ = p(c) F'(0) - \int_c^1 (1 - C) G(C^2 - c^2) C\, dC + \int_c^K [p_1(C) + p_2(C)] G(C^2 - c^2) C\, dC. \end{cases} \tag{13}$$

Machen wir nun den Grenzübergang $c \to 0$! Zwei Möglichkeiten sind in Betracht zu ziehen:

α) Die Funktion $Y(y)$ nimmt den Wert 0 an. Wenn y_0 die kleinste Wurzel von $Y(y) = 0$ ist, so lautet (13) im Grenzfalle

$$\int_0^{y_0} F[Y(y)]\, dy = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(Y)\, dY}{\sqrt{1 - Y^2}} + p_1(0) F'(0) + \int_0^K [p_1(C) + p_2(C)] G(C^2) C\, dC. \tag{14}$$

Es ist leicht einzusehen, daß wegen der Stetigkeit von $\sqrt{t} \cdot G(t)$ rechts in (13) ohne weiteres $c = 0$ eingesetzt werden kann.

β) Mit $c \to 0$ rückt die kleinste Wurzel von $Y(y) = c$ gegen ∞. Die linke Seite in (13) limitiert gegen das Integral $I[F(Y)]$. Wegen der Konvergenz des Integrals ist nämlich $\int_a^A F(Y)\, dy < \varepsilon$ für $A > a$, sobald a hinreichend groß ist. Weil wegen $F(0) = 0$ und $F''(Y) \geqq 0$ die Funktion $F(Y)$ wächst, gilt für $y > a$:

$$\int_a^y F\left[\sqrt{Y^2(y) - c^2}\right] dy < \int_a^y F[Y(y)]\, dy < \varepsilon.$$

Bei festem a konvergiert

$$\int_0^a F\left[\sqrt{Y^2(y) - c^2}\right] dy \to \int_0^a F[Y(y)]\, dy \quad \text{für} \quad c \to 0,$$

weil $F(Y)$ stetig ist. Die obige Behauptung ist damit bewiesen. Wir haben also

$$(15)\quad \int_0^{\infty} F[Y(y)]\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(Y)\,dY}{Y\sqrt{1-Y^2}} + p_1(0)F'(0) + \int_0^K [p_1(C)+p_2(C)]G(C^2)\,C\,dC$$

Weil $p_1(c)$, $p_2(c)$ und $G(C^2)$ nicht negativ sind, ist mit den Gln. (14) und (15) der erste Teil des Satzes, die Ungleichung (I), bewiesen.

3. Das Gleichheitszeichen in I. Wenn nicht $F''(Y)\equiv 0$ für $0\leq Y\leq\alpha$, $\alpha>0$, wenn also $G(t)\not\equiv 0$ ist, so gilt in (I) das Gleichheitszeichen nur, wenn fast überall $p_1(C)=0$ und $p_2(C)=0$ ist. Aus der Bedeutung der Funktion $p_2(C)$ erkennt man, daß $p_2(C)\equiv 0$ nur bei monoton abfallendem $Y(y)$ eintritt. Weil ferner $p_1(C)$ linkerseits stetig ist, rechts aber höchstens einen endlichen positiven Sprung macht, so ist fast überall $p_1(C)=0$ nur dann, wenn $p_1(C)\equiv 0$ ist. Nehmen wir $p_1(C)=p_2(C)=0$, so lautet in diesem Falle für $F(Y)=Y^2$ also $G(t)=4/\pi\,t^{\frac{1}{2}}$, die Gl. (13)

$$(16)\quad \int_0^y [Y^2(y)-c^2]\,dy = \frac{4}{\pi}\int_c^1 \frac{(1-C)\,C\,dC}{\sqrt{C^2-c^2}} = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{1-c^2}-c^2\log\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}\right],$$

für $0\leq c\leq 1$, und

$$\int_0^y [Y^2(y)-c^2]\,dy = 0 \quad \text{für} \quad 1<c\leq K.$$

Weil jedoch auf dem ganzen Integrationsintervall $Y^2(y)-c^2>0$ ist, ist diese Gleichung ausgeschlossen, wenn nicht $K=1$ ist.

Die Funktion $Y(y)$ ist monoton. Wir zeigen, daß sie jeden Wert höchstens einmal annimmt. Wegen der Monotonie müßte $Y(y)$ sonst zwischen zwei verschiedenen Punkten y_0 und y_0+a konstant bleiben, und wir können annehmen, daß dieses Intervall so groß wie möglich ist. Es wäre sodann $Y(y_0)=Y(y_0+a)=c_0$ und $Y(y_0-h)>Y(y_0)$ sowie $Y(y_0+a+h)<Y(y_0+a)$ für jedes hinreichend kleine $h>0$. Setzen wir nun in die Gl. (16) für c den Wert $c_0+\Delta c$, mit $\Delta c>0$, ein und sei $c_0+\Delta c=Y(y_0-\Delta y)$. Die Änderung Δy geht mit Δc gleichzeitig gegen Null. Wird nun die rechte Seite in (16) kurz mit $B(c)$ bezeichnet, dann bekommt man

$$\int_{y_0-\Delta y}^{y_0} Y^2(y)\,dy = (c_0+\Delta c)^2\Delta y - y_0(2c_0+\Delta c)\Delta c + B(c_0) - B(c_0+\Delta c).$$

Der Wert des Integrals linkerseits ist $Y^2(y^*)\,\Delta y$, wobei $y_0-\Delta y<y^*<y_0$, also auch $Y(y^*)>Y(y_0)=c_0$. Dividieren wir die obige Gleichung mit Δc, indem wir uns zunächst das Glied $(c_0+\Delta c)^2\,\Delta y$ nach links gebracht denken, und machen den Grenzübergang $\Delta c\to 0$! Beachten wir, daß $0<(c_0+\Delta c)^2-Y^2(y^*)<(c_0+\Delta c)^2-c^2$ ist, der Quotient $[(c_0+\Delta c)^2-Y^2(y^*)]:\Delta c$ also beschränkt bleibt, Δy aber mit $\Delta c\to 0$ ebenfalls gegen Null rückt, so bekommen wir

$$(17)\quad 2c_0y_0 + B'(c_0) = 0.$$

Analog setzen wir jetzt in (16) für c den Wert $c_0 - \Delta c$, $\Delta c > 0$, ein. Auf dem gleichen Wege wie früher bekommt man

$$2c_0(y_0 + a) + B'(c_0) = 0. \tag{18}$$

Aus dieser und der vorhin erhaltenen Gleichung ergibt sich $a = 0$. Es ist also $Y(y)$ eine monoton abnehmende Funktion, die jeden Wert höchstens einmal erreicht. Zugleich ergibt sich aus (17), für jedes c, die Gleichung $2c\,y + B'(c) = 0$ und daraus $y = \frac{2}{\pi} \log [c^{-1} + (c^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}]$. Eine leichte Umrechnung liefert $c = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y$ oder, weil $c = Y(y)$,

$$Y(y) = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Die Gleichung der Extremalen lautet

$$\sinh \frac{\pi}{2} y = \frac{\sqrt{1 - c^2}}{c} \sin \frac{\pi}{2} x.$$

Für $x = 1$ ist $\sinh \frac{\pi}{2} y = (c^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}$ und $Y(y) = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y = c$. Die Extremale erreicht ihren höchsten Punkt also am Rand AB, den sie senkrecht trifft. Daraus folgert man, daß das Integral S wirklich auf der Extremale den kleinsten Wert erhält, der sich durch kurze Rechnung $= 1$ ergibt. Damit ist die ausgesprochene Vermutung bestätigt.

Wenn $F(Y) = Y$, also $F'(Y) = 1$ ist, so ist immer $I[Y] \geqq 1$, die extremale Funktion $Y(y)$ hingegen ist nicht eindeutig bestimmt, weil aus (15) für monotone $Y(y)$ immer $I[Y] = 1$ folgt, wenn nur $p_1(0) = 0$ ist. So geben z. B. alle Funktionen $Y(y) = a/\cosh \frac{\pi}{2} a\,y$ bei $1 \leqq a < 2$ dem Integral $I[Y]$ den minimalen Wert 1 und genügen gleichzeitig der Bedingung $S \geqq 1$.

Das Integral $I[Y^\alpha]$, für $0 < \alpha < 1$, hat Null zur unteren Grenze, wie eine leichte Rechnung ergibt. In diesem Fall gibt es keine Extremalfunktion und die untere Grenze wird für $Y = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y$ nicht erreicht.

Ljubljana (Jugoslavien), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 23. Dezember 1953.)

Vries, H. L. de.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 328—347 (1954)

Über Riemannsche Räume, die infinitesimale konforme Transformationen gestatten.

Von

Hans Ludwig de Vries.

Eisenhart gibt in seinem Buch „Riemannian Geometry" [4][1]), S. 235, im folgenden auch mit R.G. zitiert, eine kanonische Form für die Metrik eines Riemannschen Raumes V_n, der eine Bewegung gestattet. In der vorliegenden Arbeit werden ähnliche Probleme behandelt für den Fall, daß der V_n infinitesimale konforme Transformationen, abgekürzt k-Transformationen genannt, zuläßt. Unter einer kanonischen Form versteht man eine Form des Fundamentaltensors eines V_n, die eine gewisse Eigenschaft abzulesen gestattet, und in die sich der Fundamentaltensor jedes V_n mit dieser Eigenschaft durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems transformieren läßt.

Im ersten Teil der Arbeit werden Räume betrachtet, die nur eine k-Transformation gestatten. Es ergibt sich, daß der Raum dann konform ist zu einem Raum mit Translation, § 1. Interessanter sind die Ergebnisse, wenn man von den Bahnkurven der Transformation spezielle Eigenschaften verlangt. Sind sie z.B. normal zu einer Hyperflächenschar, so ist der Raum konform zu einem Raum mit Parallelfeld, § 2. Verlangt man schließlich, daß sie (Nicht-Null-)Geodätische des Raumes sind, so sind sie im allgemeinen normal und der erzeugende Vektor der Transformation, die jetzt gk-Transformation genannt wird, ist dann im allgemeinen ein Gradient, er genügt also der Gleichung $v_{,ij} = \psi a_{ij}$, § 3. Riemannsche Räume, in denen diese Gleichung lösbar ist, sind schon mehrfach untersucht worden, sie gestatten in der Sprechweise von K. Yano eine *konzirkulare Transformation*. Sie werden z.B. behandelt in Arbeiten von Brinkmann [*1*], Delgleize [*2*], Fialkow [*5*], [*6*], Yano [*10*], Wong [*9*].

Im zweiten Teil der Arbeit werden Räume betrachtet, die mehrere gk Tansformationen $\overset{i}{v}_{\alpha}$ mit $\overset{v}{}_{\alpha,ij} = \psi_\alpha a_{ij}$ gestatten. Es zeigt sich, daß dann die Funktionen ψ_α eine einfache Gestalt haben müssen: $\psi_\alpha = -K\overset{v}{}_{\alpha} + b_\alpha$, K, $b_\alpha = \text{const}$. Nach geeigneter Normierung der $\overset{v}{}_{\alpha}$ kommt man zu kanonischen Formen. Für $K \neq 0$ führt sich eine Fallunterscheidung entsprechend dem Rang einer bestimmten Matrix ein. In den beiden einfachsten Fällen, die bei positiv definiter Metrik die einzig möglichen sind, erscheint die kanonische Form als konform-separabel aufgespalten. Der eine Faktor wird durch einen Raum der konstanten Krümmung K gegeben. Seine Dimension entspricht

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

der Anzahl der unabhängigen gk-Transformationen, §§ 5, 6. Im letzten Fall führen sich Nullvektorfelder ein. Konforme Separabilität kann hier nicht erreicht werden, da Fundamentalformen mit parallelen Nullvektorfeldern nicht zerfallen, § 7. Man kann also sagen: In der Theorie der infinitesimalen konformen Transformationen spielt die Gleichung $v_{,ij} = \psi a_{ij}$ dieselbe Rolle wie die Gleichung $v_{,ij} = 0$ bei den Bewegungen. Der Abspaltung eines ebenen Raumes entspricht jetzt die (konforme) Abspaltung eines Raumes konstanter Krümmung.

In § 8 werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die in den kanonischen Formen vorliegenden Riemannschen Räume von konstanter Krümmung bzw. Einstein-Räume sind. Damit ergibt sich dann sofort: Wenn ein V_n $n-1$ gk-Transformationen gestattet, so ist er von konstanter Krümmung. Andererseits wird noch einmal die BRINKMANNsche Theorie der konformen Abbildung von Einstein-Räumen auf andere Einstein-Räume aufgenommen. Man kann sagen, daß sie im Falle, daß die skalare Krümmung beider Räume ungleich Null ist und gleiches Vorzeichen hat, dadurch geschieht, daß man eine zu einer gk-Transformation gehörende endliche Transformation ausführt und, wenn die Krümmungen ungleich sind, mit einer Konstanten den Maßstab verändert.

Im letzten Paragraphen wird der Fall $K = 0$ erledigt. Es handelt sich hier um die homothetischen Transformationen von E. B. SHANKS [7]. Kanonische Formen für die Metrik werden durch Rückführung des Problems auf den Fall der §§ 5 bis 7 erhalten.

Der Fundamentaltensor eines V_n wird stets mit a_{ij} bezeichnet, zu $\bar{V}_n$ z.B. gehört dann jedoch $\bar{a}_{ij}$. Es wird nur vorausgesetzt, daß Det $a_{ij} \neq 0$ ist, die Metrik darf indefinit sein. Der Fundamentaltensor gewisser Unterräume des V_n, die in der kanonischen Form auftreten, wird mit $g_{\varrho\tau}$ bezeichnet. Die Zahlen in runden Klammern beziehen sich auf die Formeln jeweils im selben Teil der Arbeit. Alle Aussagen beziehen sich auf die Verhältnisse im Kleinen. Differenzierbarkeitsvoraussetzungen werden nicht angegeben, man denke sich z.B. alle auftretenden Funktionen analytisch.

1. Teil. Räume V_n mit k-Transformationen.

§ 1. Eine kanonische Form des Fundamentaltensors.

Ein Riemannscher Raum V_n gestattet eine *infinitesimale konforme Transformation*, im folgenden kurz *k-Transformation* genannt, wenn es in ihm ein Vektorfeld ξ_i gibt mit der Eigenschaft

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi\, a_{ij}, \qquad i, j \in N. \tag{1}$$

Dabei ist a_{ij} der Fundamentaltensor des V_n und φ ein Skalar. $\xi_{i,j}$ ist die kovariante Ableitung von ξ_i. Ferner ist

$$N = \{1, 2, \ldots, n\},$$

und $i, j \in N$ steht für $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Diese Bezeichnungsweise ist von A. G. WALKER eingeführt worden.

Wegen (1) überführt die infinitesimale Transformation

$$x'^i = x^i + \xi^i \delta t$$

den Fundamentaltensor a_{ij} in einen zu ihm konformen, den V_n also in einen zu ihm konformen Raum V_n'. Näheres dazu in R.G. § 69. $\xi^i = a^{ij}\xi_j$ heißt im folgenden *erzeugender Vektor* der Transformation.

Ist $\varphi = 0$, so liegt eine *Bewegung* vor, bei einer *Translation* ist zusätzlich noch $\xi^i\xi_i = \text{const}$. Eine k-Transformation mit $\xi^i\xi_i = \text{const} \neq 0$ ist schon eine Translation. Es folgt nämlich

$$\xi_{i,j}\xi^i = 0,$$

und (1) ergibt nach Überschieben mit $\xi^i\xi^j$ dann $\varphi = 0$.

Zunächst soll nun eine kanonische Form der Metrik derjenigen V_n aufgestellt werden, die *eine* durch $\xi^i, \xi^i\xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation gestatten. Man führe gemäß R.G. S. 223, 284 ein Koordinatensystem so ein, daß

$$\xi^i = \delta^i_1 \tag{2}$$

wird. Rechnet man die linken Seiten der Gln. (1) aus, so erhält man

$$\xi^k \partial_k a_{ij} + a_{ik}\partial_j \xi^k + a_{jk}\partial_i \xi^k = \varphi a_{ij}. \tag{3}$$

Aus (2) folgt also

$$\partial_1 a_{ij} = \varphi a_{ij}.$$

Für $a_{ij} \neq 0$ ist wegen $\xi^i\xi_i = a_{11} \neq 0$

$$\partial_1 \ln \frac{a_{ij}}{a_{11}} = 0, \tag{4}$$

also

$$a_{ij} = \varepsilon a_{11} g_{ij}(x^\varrho), \qquad \varrho \in N'.$$

Dabei ist

$$N' = \{2, \ldots, n\}.$$

$\varepsilon = \pm 1$ ist so gewählt, daß $\varepsilon a_{11} > 0$. Dann ist $g_{11} = \varepsilon$.

Eine kanonische Form der Metrik eines V_n, der eine durch $\xi^i, \xi^i\xi_i \neq 0$ erzeugte k-Transformation gestattet, wird durch

$$\left\{\begin{array}{ll} ds^2 = e^{2\sigma(x^k)} g_{ij}(x^\varrho)\, dx^i\, dx^j & \\ g_{11} = \varepsilon = \pm 1, & i,j,k = 1, \ldots, n \\ & \varrho = 2, \ldots, n, \end{array}\right. \tag{5}$$

gegeben. Es ist $\xi^i = \delta^i_1$.

Für (5) ist nämlich (3) erfüllt, $\varphi = 2\partial_1\sigma$. Der V_n (5) ist konform zum Raum $\bar{V}_n$

$$g_{ij}(x^\varrho)\, dx^i\, dx^j, \qquad g_{11} = \varepsilon.$$

Hier sind alle g_{ij} von x^1 unabhängig. $\bar{V}_n$ gestattet also eine Bewegung in der x^1-Richtung, R.G. S. 235. Da weiterhin noch $g_{11} = \varepsilon$ ist, sind die zu x^1 gehörigen Parameterlinien Geodätische des Raumes, R.G. S. 58. Demnach ist die Bewegung sogar eine Translation, R.G. S. 239.

Nun zum Fall $\xi^i \xi_i = 0$. Dann ist $a_{11} = 0$, man darf aber $a_{12} \neq 0$ annehmen. Mit einem Schluß wie bei (4) gelangt man zu der *kanonischen Form*

$$(6) \qquad \begin{cases} ds^2 = e^{2\sigma(x^k)}\, g_{ij}(x^\varrho)\, dx^i\, dx^j \\ g_{11} = 0, \qquad g_{12} = \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Es ist $\xi^i = \delta^i_1$. Der V_n ist jetzt konform zu einem $\overline{V}_n$ mit einer Bewegung, die von einem Nullvektor erzeugt wird.

An den kanonischen Formen liest man ab, daß, wie es sein muß, die zugehörigen endlichen Transformationen

$$x'^i = x^i + \delta^i_1 c$$

den V_n in zu ihm konforme Räume überführen. Schließlich sieht man, daß zu V_n konforme Räume ebenfalls eine k-Transformation gestatten. Es folgen jetzt Betrachtungen über Räume mit k-Transformationen, deren Bahnkurven spezielle Eigenschaften haben.

§ 2. k-Transformationen mit normalen Bahnkurven.

Eine Kongruenz heißt *normal*, wenn sie das System der Orthogonaltrajektorien einer einparametrigen Schar von Hyperflächen bildet, R.G. S. 114. Seien nun die Bahnkurven normal und zunächst von nicht verschwindender Länge. Gesucht wird eine kanonische Fundamentalform.

Für das ds^2 darf die Form (5) zugrunde gelegt werden:

$$(7) \qquad \begin{cases} a_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}(x^\varrho) \\ a_{11} = \varepsilon\, e^{2\sigma} \\ \xi^i = \delta^i_1, \qquad i, j \in N, \ \varrho \in N'. \end{cases}$$

Die Schar der Hyperflächen werde durch

$$v(x^i) = c$$

beschrieben. Es soll also

$$\xi_i = f(x^k)\, v_{,i}, \qquad f \neq 0,$$

sein. Es ist $v_{,1} \neq 0$, sonst wäre entgegen (7) $a_{11} = 0$ wegen

$$(8) \qquad a_{i1} = a_{ij} \xi^j = f v_{,i}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$a_{\varrho 1} v_{,1} = a_{11} v_{,\varrho}, \qquad \varrho \in N'.$$

Damit ist aber nach (7) das Verhältnis

$$(9) \qquad \frac{v_{,\varrho}}{v_{,1}} = \frac{a_{\varrho 1}}{a_{11}} = \varepsilon\, g_{\varrho 1}(x^\tau)$$

von x^1 unabhängig.

Zunächst wird gezeigt, daß eine Funktion $w(x^\varrho)$, $\varrho \in N'$, gefunden werden kann, so daß

$$V = x^1 + w$$

eine Funktion von v ist. Dann wird die Schar der Hyperflächen auch durch

$$V(v) = x^1 + w = c$$

beschrieben. w ist aus den Bedingungen, daß die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} v_{,i} \\ V_{,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{,1} & v_{,\varrho} \\ 1 & w_{,\varrho} \end{pmatrix}$$

den Rang eins hat, zu bestimmen. Das liefert die Gleichungen

$$w_{,\varrho} = \frac{v_{,\varrho}}{v_{,1}}. \tag{10}$$

Die rechte Seite ist nach (9) von x^1 unabhängig. Es bleibt nur zu zeigen, daß die Rotation verschwindet. Für den Augenblick werde $\partial_{ij}^2 v = v_{ij}$ gesetzt. Dann ist

$$\partial_\varrho w_{,\tau} - \partial_\tau w_{,\varrho} = v_{,1}^{-2}(v_{,\varrho} v_{1\tau} - v_{,\tau} v_{1\varrho}). \tag{11}$$

Aus (9) folgt durch partielle Differentiation nach x^1

$$v_{,\varrho} v_{11} = v_{,1} v_{\varrho 1}.$$

Ebenso gilt

$$v_{,1} v_{\tau 1} = v_{,\tau} v_{11}.$$

Für $v_{11} = 0$ verschwindet also (11). Anderenfalls folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$v_{,\varrho} v_{1\tau} = v_{,\tau} v_{1\varrho},$$

und die rechte Seite von (11) wird wiederum zu Null.

Führt man nun neue Koordinaten durch

$$x'^1 = x^1 + w(x^\varrho),$$
$$x'^\varrho = x^\varrho$$

ein, so lautet die Gleichung der Hyperflächen $x'^1 = c$. Die neuen Komponenten a'_{ij} und ξ'^i berechnet man mit (7), (9), (10). Man sieht dann nach Weglassen der Striche:

Eine kanonische Form der Metrik eines V_n, der eine durch ξ^i, $\xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation mit normalen Bahnkurven gestattet, wird durch

$$\begin{cases} ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j = e^{2\sigma(x^k)} \left(\varepsilon (dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\, dx^\varrho\, dx^\tau\right), \\ \qquad\qquad i, j, k = 1, \ldots, n, \qquad \pi, \varrho, \tau = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{12}$$

gegeben. Es ist $\xi^i = \delta_1^i$. Die Bahnkurven sind normal zu $x^1 = c$.

Bemerkung. Eine Translation ξ^i, $\xi^i \xi_i = c \neq 0$, deren Bahnkurven normal sind, ist ein Parallelfeld, und umgekehrt, denn nach (12) ist andererseits $\xi^i \xi_i = \varepsilon\, e^{2\sigma}$.

Für k-Transformationen mit $\xi^i \xi_i = 0$ kommt man zu einem analogen Ergebnis. Aus (6) und (8) folgt $v_{,1} = 0$, also

$$v = v(x^\varrho), \qquad \varrho \in N'.$$

(9) muß durch

$$\frac{v_{,i}}{v_{,2}} = \frac{a_{1i}}{a_{12}}$$

ersetzt werden. Dann führe man sofort neue Koordinaten durch

$$x'^2 = v(x^\varrho),$$
$$x'^i = x^i, \qquad i \in N - \{2\}$$

ein. Es ergibt sich, daß der V_n konform ist zu einem $\overline{V}_n$, der ein paralleles Nullvektorfeld gestattet. Zusammenfassend kann man also sagen:

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein V_n eine k-Transformation mit normalen Bahnkurven gestattet, ist, daß er konform zu einem $\overline{V}_n$ ist, der ein paralleles Vektorfeld trägt.

Zum Beispiel zeigt das Bogenelement

$$ds^2 = e^{2\sigma} \sum e_i (dx^i)^2, \qquad i \in N,$$

der konform-ebenen Räume, daß sie n unabhängige k-Transformationen mit normalen Bahnkurven gestatten. Erzeugende sind $\xi^i_{p|} = \delta^i_p$. Die mit $X_p = \xi^i_{p|} \partial_i = \partial_p$ gebildeten Poissonklammern verschwinden:

$$(X_p, X_q) = 0, \qquad p, q \in N. \tag{13}$$

Die $\xi^i_{p|}$ erzeugen also eine abelsche Gruppe.

Möge nun umgekehrt ein V_n n k-Transformationen $\xi^i_{p|}$,

$$\xi_{p|i,j} + \xi_{p|j,i} = \varphi_p a_{ij}, \tag{14}$$

mit der Eigenschaft (13) besitzen. Das Koordinatensystem werde so gewählt [8], S. 49, daß

$$\xi^i_{p|} = \delta^i_p. \tag{15}$$

(14) lautet dann

$$\partial_p a_{ij} = \varphi_p a_{ij}.$$

Durch Integration erhält man

$$a_{ij} = e^{2\sigma} c_{ij}, \tag{16}$$

$c_{ij} = \text{const}$.

Die konform-ebenen Räume sind dadurch gekennzeichnet, daß sie eine n-gliedrige konforme Gruppe gestatten, deren Erzeugende miteinander vertauschbar sind.

Aus (15) und (16) folgt noch

$$\xi_{p|i} = a_{ij} \xi^j_{p|} = a_{ip} = e^{2\sigma} (c_{pj} x^j)_{,i}.$$

Die Bahnkurven sind also normal.

§ 3. k-Transformationen mit geodätischen Bahnkurven.

Im folgenden wird eine k-Transformation, deren erzeugender Vektor ξ^i (a) das Tangentenvektorfeld einer geodätischen Kongruenz bildet und (b) ein Längenquadrat $\xi^i \xi_i \neq 0$ hat, eine *gk-Transformation* genannt.

Der Einheitsvektor in der ξ^i-Richtung einer durch ξ^i erzeugten gk-Transformation sei λ_1^i:

$$\xi_i = e^{-\Phi}\lambda_{1|i}. \tag{17}$$

Er werde zu einem orthogonalen n-Bein $\lambda_{p|i}$ ergänzt:

$$\lambda_{p|}^i \lambda_{q|i} = e_p \delta_{pq}, \qquad p, q \in N. \tag{18}$$

Dann ist mit den Drehungskoeffizienten von RICCI, R.G. § 30ff.,

$$\lambda_{r|i,j} = \sum_{p,q} e_p e_q \gamma_{rpq} \lambda_{p|i} \lambda_{q|j}.$$

Gl. (1) lautet in dieser Schreibweise

$$\sum e_p e_q (\gamma_{1pq} + \gamma_{1qp}) \lambda_{p|i} \lambda_{q|j} - \Phi_{,j} \lambda_{1|i} - \Phi_{,i} \lambda_{1|j} = \varphi e^{\Phi} a_{ij}.$$

Überschieben mit λ_1^i, $\lambda_{1|}^i$ $\lambda_{1|}^j$ ergibt wegen $\gamma_{hkl} = 0$

$$\sum e_q \gamma_{1q1} \lambda_{q|j} - \Phi_{,j} e_1 - \Phi_{,i} \lambda_{1|}^i \lambda_{1|j} = \varphi e^{\Phi} \lambda_{1|j}, \tag{19}$$

$$-2 e_1 \Phi_{,j} \lambda_{1|}^j = e_1 \varphi e^{\Phi}. \tag{20}$$

Eliminiert man φe^{Φ} aus (19), so bleibt

$$\sum e_q \gamma_{1q1} \lambda_{q|j} - e_1 \Phi_{,j} = -\Phi_{,i} \lambda_{1|}^i \lambda_{1|j}. \tag{21}$$

Die Kongruenz ist dann und nur dann geodätisch, wenn

$$\gamma_{1q1} = 0,$$

R.G. S. 100. Von (21) bleibt also

$$\Phi_{,j} = e_1 \Phi_{,i} \lambda_{1|}^i \lambda_{1|j}. \tag{22}$$

Im Fall $\Phi_{,i}\lambda_1^i = 0$ folgt $\Phi = \text{const}$ und aus (20) $\varphi = 0$. Dann ist die gk-Transformation eine Translation. Anderenfalls zeigt (22), daß $\lambda_{1\,j}$ und also auch ξ_j eine normale Kongruenz bildet. Wegen der Bemerkung von S. 332 hat man:

gk-Transformationen mit Ausnahme derjenigen Translationen, die nicht durch ein Parallelfeld erzeugt werden, besitzen eine normale Bahnkurvenkongruenz.

Es soll eine kanonische Form für die Metrik aufgestellt werden. Zunächst sei bemerkt: Wird eine k-Transformation durch ein Gradientenfeld $v_{,i}$ erzeugt, so ist sie eine gk-Transformation. Mit $v_{,i} = e^{-\Phi}\lambda_{1\,i}$ und einem zugehörigen n-Bein $\lambda_{p|}^i$ drückt sich

$$2v_{,ij} = \varphi a_{ij}$$

so aus:

$$\sum e_p e_q \gamma_{1pq} \lambda_{p|i} \lambda_{q|j} - \Phi_{,j} \lambda_{1|i} = \frac{\varphi}{2} e^{\Phi} a_{ij}.$$

Überschieben mit $\lambda_{1|}^j$ ergibt

$$\sum e_p \gamma_{1p1} \lambda_{p|i} - \Phi_{,j} \lambda_{1|}^j \lambda_{1|i} = \frac{\varphi}{2} e^{\Phi} \lambda_{1|i}.$$

Wegen (18) folgt $\gamma_{1p1} = 0$.

Man darf nun von

$$\begin{cases} ds^2 = e^{2\sigma}\left(\varepsilon\,(dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\,dx^\varrho\,dx^\tau\right) \\ \xi^i = \delta_1^i \end{cases} \tag{23}$$

ausgehen. Nach Voraussetzung ist

$$\lambda_1^j \lambda_{1\,i,j} = \sum e_p \gamma_{1p1} \lambda_{p|i} = 0.$$

Hieraus folgt mit (17) für (23)

$$\sigma_{,\varrho} = 0, \qquad \varrho = N'.$$

Eine kanonische Form der Metrik eines V_n, der eine durch $\xi^i, \xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation mit geodätischen Bahnkurven gestattet, wird, außer wenn sie eine nicht durch ein Parallelfeld erzeugte Translation darstellt, gegeben durch

$$\text{(24)} \qquad \begin{cases} ds^2 = e^{2\sigma(x^1)} \left(\varepsilon (dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\, dx^\varrho\, dx^\tau\right) \\ \xi^i = \delta_1^i, \qquad \pi, \varrho, \tau = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Denn für (24) ist

$$\xi_i = a_{ij}\, \delta_1^j = a_{i1} = [\varepsilon \int e^{2\sigma}\, dx^1]_{,i}$$

schon ein Gradientenfeld $v_{,i}$. Für (24) ist $v = v(x^1)$ und $\varphi = 2\partial_1 \sigma$, also $\varphi = \varphi(x^1)$. Gilt

$$2v_{,ij} = \varphi\, a_{ij},$$

so ist demnach $\varphi = \varphi(v)$. Im Fall $\varphi = 2$ kann $\sigma = x^1$ gesetzt werden. Ferner sieht man:

Die durch $\xi^i, \xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation hat, außer wenn sie eine nicht durch ein Parallelfeld erzeugte Translation ist, dann und nur dann geodätische Bahnkurven, wenn ξ_i ein Gradient ist, $\xi_i = v_{,i}$.

2. Teil. Räume V_n mit mehreren gk-Transformationen[2]).

§ 4. Vorbemerkungen.

Ein V_n gestatte r Funktionen $\underset{\alpha}{v} \neq \text{const}$ mit der Eigenschaft

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \underset{\alpha}{v}_{,ij} = \psi_\alpha\, a_{ij}, & \alpha \in R \\ R = \{1, \ldots, r\}, & r \leq n. \end{cases}$$

Es ist dann $\psi_\alpha = \psi_\alpha(\underset{\alpha}{v})$. Die Vektoren $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ seien voneinander unabhängig. Es bestehe also keine Relation $\Phi^\alpha(x^j)\, \underset{\alpha}{v}_{,i} = 0$, nicht alle $\Phi^\alpha = 0$.

Zunächst soll gezeigt werden, daß für $r > 1$

$$\text{(2)} \qquad \psi'_\alpha = -K$$

gilt, $K = const$, unabhängig von α. (Der Strich bedeutet Ableitung nach dem Argument.)

Man multipliziere die Ricci-Identität für (1),

$$\text{(3)} \qquad \psi'_\alpha (\underset{\alpha}{v}_{,k}\, a_{ij} - \underset{\alpha}{v}_{,j}\, a_{ik}) = \underset{\alpha}{v^l} R_{lijk},$$

mit $\underset{\beta}{v^i}$, $\beta \neq \alpha$, und benutze sie nochmals für β:

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha (\underset{\alpha}{v}_{,k}\, \underset{\beta}{v}_{,j} - \underset{\alpha}{v}_{,j}\, \underset{\beta}{v}_{,k}) &= \underset{\beta}{v^i}\, \underset{\alpha}{v^l} R_{lijk} \\ &= -\underset{\alpha}{v^l}\, \underset{\beta}{v^i} R_{iljk} = \psi'_\beta (\underset{\alpha}{v}_{,k}\, \underset{\beta}{v}_{,j} - \underset{\alpha}{v}_{,j}\, \underset{\beta}{v}_{,k}). \end{aligned}$$

[2]) gk-Transformationen wurden auf S. 333 definiert. Im folgenden bleiben Translationen, die nicht durch ein Parallelfeld erzeugt werden, ausgeschlossen.

Aus der Unabhängigkeit der $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ folgt

$$\psi'_\alpha = \psi'_\beta. \tag{4}$$

Durch Differentiation nach x^i ergibt sich hieraus

$$\psi''_\alpha \underset{\alpha}{v}_{,i} = \psi''_\beta \underset{\beta}{v}_{,i}.$$

Wegen der Unabhängigkeit folgt $\psi''_\alpha = 0$. (4) liefert dann (2).

Im Falle $K = 0$ können die $\underset{\alpha}{v}$ durch einen konstanten Faktor so normiert werden, daß entweder $\underset{\alpha}{v}_{,ij} = a_{ij}$ oder $\underset{\beta}{v}_{,ij} = 0$ ist. Im Falle $K \neq 0$ lautet (1)

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = (-K \underset{\alpha}{v} + b_\alpha)\, a_{ij}.$$

Hier sollen die $\underset{\alpha}{v}$ durch einen konstanten Summanden so normiert werden, daß

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij} \tag{5}$$

gilt.

Wenn eine Relation

$$v_{,i} = \Phi^\alpha \underset{\alpha}{v}_{,i}, \qquad \alpha \in R,\ r < n, \tag{6}$$

zwischen den Erzeugenden $v_{,i}$, $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ von gk-Transformationen besteht, so sind die Φ^α konstant. Die $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ seien dabei als unabhängig vorausgesetzt.

Später wird gezeigt, daß dieser Satz für $r = n$ falsch ist. Der Beweis wird für $K \neq 0$ gegeben, für $K = 0$ verläuft er ähnlich. Durch kovariante Differentiation folgt aus (6)

$$-K v\, a_{ij} = -K \Phi^\alpha \underset{\alpha}{v}\, a_{ij} + \Phi^\alpha_{,j} \underset{\alpha}{v}_{,i}.$$

Nun muß $v = \Phi^\alpha \underset{\alpha}{v}$ sein, denn der Rang der Matrix $(\Phi^\alpha_{,j} \underset{\alpha}{v}_{,i})$ ist wegen $r < n$ kleiner als n. Aus $\Phi^\alpha_{,j} \underset{\alpha}{v}_{,i} = 0$ folgt dann wegen der Unabhängigkeit der $\underset{\alpha}{v}_{,i}$, daß $\Phi^\alpha_{,j} = 0$ und also $\Phi^\alpha = \text{const}$ ist.

Es sollen jetzt kanonische Formen für die Metrik derjenigen Räume V_n aufgestellt werden, die r unabhängige Vektoren $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ mit

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij}, \qquad K \neq 0,\ \alpha \in R,\ 1 \leq r \leq n \tag{7}$$

gestatten. (Der Fall $K = 0$ wird in § 9 behandelt.) Definiert man $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ durch die Gleichung

$$\underset{\alpha}{v}^i \underset{\beta}{v}_{,i} = -K \underset{\alpha}{v} \underset{\beta}{v} + c_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

so zeigt Differentiation nach x^j wegen (7), daß $c_{\alpha\beta} = \text{const}$ ist. Nun gehe man mit Konstanten A^γ_α, $\det A^\gamma_\alpha \neq 0$, zu r neuen Funktionen $\underset{\alpha}{\bar{v}}$ über:

$$\underset{\alpha}{\bar{v}} = A^\gamma_\alpha \underset{\gamma}{v}.$$

Es gilt dann auch

$$\underset{\alpha}{\bar{v}}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{\bar{v}}\, a_{ij}.$$

(8) lautet für die $\underset{\alpha}{\bar{v}}$:

$$\underset{\alpha}{\bar{v}}^i \underset{\beta}{\bar{v}}_{,i} = -K \underset{\alpha}{\bar{v}} \underset{\beta}{\bar{v}} + \bar{c}_{\alpha\beta} \tag{9}$$

mit

$$\bar{c}_{\alpha\beta} = A^{\gamma}_{\alpha} A^{\delta}_{\beta} c_{\gamma\delta}.$$

Die A^{γ}_{α} seien nun so gewählt, daß

$$(\bar{c}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & e_{u+1} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & e_r \end{pmatrix} \tag{10}$$

wird, $e_\alpha = e^\alpha = \pm 1$, $\alpha = u+1, \ldots, r$. Dabei ist

$$r - u = Rg(c_{\alpha\beta}) = Rg(\bar{c}_{\alpha\beta}) \leqq r.$$

Im folgenden werden die Querstriche wieder weggelassen. Die Fälle $Rg(c_{\alpha\beta}) = r$, $= r-1$, $< r-1$ werden getrennt behandelt. Die letzte Möglichkeit kommt bei positiv definiter Metrik nicht vor. Aus (9) und (10) folgt nämlich

$$\left(\underset{1}{v}\,\underset{2}{v}^i - \underset{2}{v}\,\underset{1}{v}^i\right)\left(\underset{1}{v}\,\underset{2}{v}_{,i} - \underset{2}{v}\,\underset{1}{v}_{,i}\right) = 0.$$

§ 5. Der Fall $Rg\left(\underset{\alpha}{v}^i\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K\,\underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}\right) = r.$

Bezeichnungen: N und R wie bisher,

$$\bar{R} = N - R.$$

Es sei

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K\,\underset{\alpha}{v}\,a_{ij}, \tag{11}$$

$$\underset{\alpha}{v}^i\,\underset{\beta}{v}_{,i} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} - K\,\underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}, \qquad \alpha, \beta \in R,\ i, j \in N. \tag{12}$$

Setzt man $X_\alpha = \underset{\alpha}{v}^i\,\partial_i$, so gilt unabhängig von der Fallunterscheidung für die Poissonklammern wegen (11)

$$(X_\alpha, X_\beta) = K\,\underset{\alpha}{v}\,X_\beta - K\,\underset{\beta}{v}\,X_\alpha.$$

Das Differentialgleichungssystem

$$X_\alpha F = 0 \tag{13}$$

ist also vollständig und gestattet $n-r$ funktional unabhängige Lösungen F^ϱ, $\varrho \in \bar{R}$.

Nun mache man die Koordinatentransformation

$$x'^\alpha = \underset{\alpha}{v}, \qquad x'^\varrho = F^\varrho. \tag{14}$$

Es existiert keine Funktion $F(y^\alpha, y^\varrho)$, $\alpha \in R$, $\varrho \in \bar{R}$, für die

$$F\left(\underset{\alpha}{v}, F^\varrho\right) \equiv 0$$

gilt. Durch Multiplikation mit X_α würde

$$\sum_{\beta \in R} \underset{\alpha}{v}^i\,\underset{\beta}{v}_{,i}\,\partial_\beta F = 0$$

folgen. Mit (12) ergibt sich hieraus

$$e_\alpha \partial_\alpha F - K\,\underset{\alpha}{v} \sum \underset{\beta}{v}\,\partial_\beta F = 0. \tag{15}$$

Man multipliziere mit $e_\alpha \underset{\alpha}{v}$ und summiere über α:

$$\left(1 - K \sum e_\alpha \underset{\alpha}{v}^2\right) \cdot \sum \underset{\beta}{v}\, \partial_\beta F = 0.$$

Hier muß der zweite Faktor verschwinden. (15) ergibt dann $\partial_\alpha F = 0$.

Nach der Transformation hat man

$$\underset{\alpha}{v'} = x'^\alpha.$$

Daraus ergeben sich die neuen kovarianten Komponenten

$$\underset{\alpha}{v'}_{,i} = \delta_{\alpha i}. \tag{16}$$

Für die kontravarianten Komponenten erhält man aus (12) bis (14)

$$\begin{cases} \underset{\alpha}{v'}^\beta = \underset{\alpha}{v}^i \partial_i x'^\beta - \underset{\alpha}{v}^i \underset{\beta}{v}_{,i} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} - K x'^\alpha x'^\beta \\ \underset{\alpha}{v'}^\varrho = \underset{\alpha}{v}^i \partial_i x'^\varrho = 0, \qquad \alpha, \beta \in R,\ \varrho \in \overline{R}. \end{cases} \tag{17}$$

Es müssen nun die neuen Komponenten des Fundamentaltensors ermittelt werden. Die Striche, die sich auf das neue Koordinatensystem beziehen, werden im folgenden weggelassen. Aus $\underset{\alpha}{v}^i a_{i\beta} = \underset{\alpha}{v}_{,\beta}$ folgt mit (16) und (17)

$$e_\alpha a_{\alpha\beta} - K x^\alpha \sum_{\gamma \in R} x^\gamma a_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Man multipliziere mit $e^\alpha x^\alpha$ und summiere über α. Löst man dann nach $\sum x^\gamma a_{\gamma\beta}$ auf und setzt in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich

$$a_{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} + K \frac{e^\alpha x^\alpha e^\beta x^\beta}{1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

Aus $\underset{\alpha}{v}^i a_{i\varrho} = \underset{\alpha}{v}_{,\varrho}$ erhält man auf ähnliche Weise

$$a_{\alpha\varrho} = 0, \qquad \alpha \in R,\ \varrho \in \overline{R}. \tag{18}$$

Aus $\underset{\alpha}{v}_{,i} a^{i\beta} = \underset{\alpha}{v}^\beta$ und aus (18) folgt

$$a^{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} - K x^\alpha x^\beta, \qquad a^{\alpha\varrho} = 0. \tag{19}$$

Zur Gewinnung der $a_{\varrho\sigma} \neq 0$, $\varrho, \sigma \in \overline{R}$, muß (11) für $i = \varrho, j = \sigma$, ausgenutzt werden. Diese Gleichung lautet wegen (16) und (19)

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\beta \in R} (e_\alpha \delta_{\alpha\beta} - K x^\alpha x^\beta)\, \partial_\beta a_{\varrho\sigma} = - K x^\alpha a_{\varrho\sigma},$$

oder aufgelöst,

$$\partial_\alpha a_{\varrho\sigma} = \frac{-2K e^\alpha x^\alpha}{1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2} a_{\varrho\sigma}.$$

Integration liefert

$$a_{\varrho\sigma} = \left(1 - K \sum c_\gamma (x^\gamma)^2\right) g_{\varrho\sigma}(x^\tau).$$

Das ds^2 hat also jetzt die Form

$$\begin{cases} ds^2 = \sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + K \dfrac{\sum e_\alpha x^\alpha dx^\alpha \cdot \sum e_\beta x^\beta dx^\beta}{1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2} + \left(1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2\right) dt^2 \\ dt^2 = g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R,\ \varrho, \sigma, \tau \in \overline{R}. \end{cases} \tag{20}$$

cht man nun noch die Koordinatentransformation

$$x^\alpha = \frac{\bar{x}^\alpha}{1 + \frac{K}{4}\sum e_\gamma (\bar{x}^\gamma)^2}, \quad x^\varrho = \bar{x}^\varrho, \qquad \alpha, \gamma \in R,\ \varrho \in \overline{R},$$

erhält man schließlich das folgende Ergebnis, die Querstriche sind wiederum ggelassen worden:

Gestattet ein V_n r unabhängige gk-Transformationen $\underset{\alpha}{v}_{i;ij} = -K \underset{\alpha}{v} a_{ij}$, $r \leq n$, $K \neq 0$, und ist

$$Rg\left(\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}\right) = r,$$

wird eine kanonische Form der Metrik durch

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{1}{\left[1 + \frac{K}{4}\sum e_\gamma (x^\gamma)^2\right]^2} \times \\ & \times \left[\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + \left(1 - \frac{K}{4}\sum e_\gamma (x^\gamma)^2\right)^2 g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma\right], \\ & \alpha, \gamma = 1, \ldots, r, \quad \varrho, \sigma, \tau = r+1, \ldots, n, \end{aligned}\right.$$

geben. Normierte Erzeugende der Transformationen sind

$$\underset{\alpha}{v} = \frac{x^\alpha}{1 + \frac{K}{4}\sum e_\gamma (x^\gamma)^2}, \qquad \alpha, \gamma = 1, \ldots, r.$$

Fall $r = n$ fällt das Glied mit $g_{\varrho\sigma}$ weg.

Jeder Raum (22) gestattet nämlich auch die durch (23) erzeugten gk-ansformationen. Setzt man in (22) $x^\varrho = \text{const}$, so erhält man einen V_r der nstanten Krümmung K. Er ist in bezug auf V_n totalgeodätisch.

§ 6. Der Fall $Rg\left(\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}\right) = r - 1$.

Bezeichnungen: $N, R, \overline{R}$ wie in § 5,

$$R' = \{2, \ldots, r\}.$$

sei

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v} a_{ij}, \qquad \alpha \in R,$$

$$\underset{1}{v^i}\,\underset{1}{v}_{,i} = -K \underset{1}{v}\,\underset{1}{v},$$

$$\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\lambda}{v}_{,i} = e_\alpha \delta_{\alpha\lambda} - K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\lambda}{v}, \qquad \alpha \in R,\ \lambda \in R'.$$

un mache man die Koordinatentransformation

$$x'^1 = \frac{1}{-e_1 K \underset{1}{v}}, \quad x'^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{\underset{\lambda}{v}}{\underset{1}{v}}, \quad x'^\varrho = F^\varrho, \qquad \lambda \in R',\ \varrho \in \overline{R}.$$

bei ist $e_1 = \pm 1$ so gewählt, daß $-e_1 K > 0$ ist, und die F^ϱ seien unabngige Lösungen von (13). Es existiert keine Funktion $F(y^\alpha, y^\varrho)$, $\alpha \in R$, $\overline{R}$, für die

$$F(\underset{\alpha}{v}, F^\varrho) \equiv 0$$

gilt. Durch Multiplikation mit X_α würde

$$\sum_{\beta \in R} \underset{\alpha}{v^i}\, \underset{\beta}{v}_{,i}\, \partial_\beta F = 0$$

folgen. Mit (25) und (26) ergibt sich hieraus für $\alpha = 1$

$$\sum \underset{\beta}{v}\, \partial_\beta F = 0 \tag{28}$$

und für $\alpha = \lambda \in R'$ unter Benutzung der letzten Gleichung $\partial_\lambda F = 0$. Da liefert (28) $\partial_1 F = 0$.

Die Striche, die sich auf das neue Koordinatensystem beziehen, werd im folgenden wieder weggelassen. Nach der Transformation hat man

$$\underset{1}{v} = \frac{1}{-e_1 K x^1}, \qquad \underset{\lambda}{v} = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{x^\lambda}{x^1}, \qquad \lambda \in R'. \tag{29}$$

Daraus ergeben sich die neuen kovarianten Komponenten

$$\underset{1}{v}_{,i} = -\frac{1}{-e_1 K (x^1)^2}\, \delta_{1i}, \tag{30}$$

$$\underset{\lambda}{v}_{,i} = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \left(\frac{\delta_{\lambda i}}{x^1} - \frac{x^\lambda}{(x^1)^2}\, \delta_{i1} \right). \tag{31}$$

Unter Berücksichtigung von (13), (25) bis (27) und (29) errechnet man die kontravarianten Komponenten

$$\underset{1}{v^i} = -e_1 \delta^i_1, \tag{32}$$

$$\underset{\lambda}{v^1} = \sqrt{-e_1 K}(-e_1 x^\lambda), \qquad \underset{\lambda}{v^\mu} = \sqrt{-e_1 K}\, e_\lambda\, \delta^\mu_\lambda\, x^1, \qquad \underset{\lambda}{v^\varrho} = 0, \qquad \lambda, \mu \in \tag{33}$$

Ferner müssen die Komponenten des Fundamentaltensors ermittelt werd Aus $\underset{1}{v^i}\, a_{ij} = \underset{1}{v}_{,j}$ folgt mit (30) und (32)

$$a_{1j} = \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2}\, e_1\, \delta_{1j}, \qquad j \in N. \tag{34}$$

Entsprechend bekommt man aus $\underset{\lambda}{v^i}\, a_{i\mu} = \underset{\lambda}{v}_{,\mu}$ und $\underset{\lambda}{v^i}\, a_{i\varrho} = \underset{\lambda}{v}_{,\varrho}$ mit (31) bis (und (34)

$$a_{\lambda\mu} = \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2}\, e_\lambda\, \delta_{\lambda\mu}, \qquad a_{\lambda\varrho} = 0, \qquad \lambda, \mu \in R', \ \varrho \in \overline{R}.$$

Zur Gewinnung der $a_{\varrho\sigma} \neq 0$, $\varrho, \sigma \in \overline{R}$, muß (24) für $i = \varrho$, $j = \sigma$ ausgenu werden. Mit den bisherigen Ergebnissen erhält man

$$\partial_\alpha \ln a_{\varrho\sigma} = -\frac{2}{x^1}\, \delta_{1\alpha}, \qquad \alpha \in R.$$

Integration ergibt

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2}\, g_{\varrho\sigma}(x^\tau), \qquad \varrho, \sigma, \tau \in \overline{R}.$$

Damit hat man insgesamt:

estattet ein V_n r unabhängige gk-Transformationen $\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij}$, $\leqq n$, $K \neq 0$, *und ist*

$$Rg\left(v^i_{\alpha}\, v_{\beta,i} + K \underset{\alpha}{v}\, \underset{\beta}{v}\right) = r - 1,$$

rd eine kanonische Form der Metrik durch

$$\left\{ ds^2 = \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2} \left(\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma \right), \right.$$
$$\alpha = 1, \ldots, r, \quad \varrho, \sigma, \tau = r+1, \ldots, n,$$

n. Normierte Erzeugende der Transformationen sind

$$\underset{1}{v} = \frac{1}{-e_1 K x^1}, \qquad \underset{\lambda}{v} = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{x^\lambda}{x^1}, \qquad \lambda = 2, \ldots, r.$$

all $r = n$ fällt das Glied mit $g_{\varrho\sigma}$ weg.

der Raum (35) gestattet nämlich auch die durch (36) erzeugten gk-formationen. Setzt man in (35) $x^\varrho = \text{const}$, so erhält man einen V_r der anten Krümmung K. Er ist in bezug auf V_n totalgeodätisch. Will man nalog zu (22) in der RIEMANNschen Form haben, so mache man die formation

$$x^1 = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{H}{\sqrt{-e_1 K}\, x'^1 + h}, \qquad x^\lambda = \frac{x'^\lambda}{\sqrt{-e_1 K}\, x'^1 + h}, \qquad x^\varrho = x'^\varrho.$$

ist

$$H = 1 + \frac{K}{4} \sum_{\alpha \in R} e_\alpha (x'^\alpha)^2 = 2 - h.$$

5) und (36) erhält man dann (nach Weglassen der Striche) die *kanonische*

$$\left\{ ds^2 = \frac{1}{H^2} \left(\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + \left(\sqrt{-e_1 K}\, x^1 + h\right)^2 g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma \right) \right.$$
$$\underset{1}{v} = \frac{\sqrt{-e_1 K}\, x^1 + h}{\sqrt{-e_1 K}\, H}, \qquad \underset{\lambda}{v} = \frac{x^\lambda}{H}.$$

§ 7. Der Fall $Rg\left(v^i_{\alpha}\, v_{\beta,i} + K \underset{\alpha}{v}\, \underset{\beta}{v}\right) < r - 1$.

zeichnungen: $N, R, \overline{R}$ wie in §§ 5, 6,

$$S = \{1, \ldots, s\}, \quad S' = \{2, \ldots, s\}, \quad T = \{s+1, \ldots, r\}.$$

nst werde die Numerierung der $\underset{\alpha}{v}$ so abgeändert, daß die Matrix (10) rm

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & e_2 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_s & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in R,$$

Da in § 6 (wie auch in § 5) nicht vorausgesetzt war, daß die $\underset{\alpha}{v}$ und die kombinationen $\sum a^\alpha \underset{\alpha}{v}$ *alle* gk-Transformationen erschöpfen, darf man

von dem Bogenelement (35) und den Erzeugenden (36) ausgehen. Dabei jetzt

$$\alpha \in S, \quad \varrho, \sigma, \tau \in T + \overline{R}, \quad \lambda \in S'. \tag{40}$$

Es müssen nun die $\underset{\omega}{v}, \omega \in T$, berücksichtigt werden. Für sie gilt

$$\underset{\omega}{v}_{,ij} = -K \underset{\omega}{v} a_{ij}, \tag{41}$$

$$\underset{\alpha}{v^i} \underset{\omega}{v}_{,i} = -K \underset{\alpha}{v} \underset{\omega}{v}, \qquad \alpha \in R, \ \omega \in T. \tag{42}$$

Mit (35) und (36) folgt aus (42) für $\alpha = 1$

$$\underset{\omega}{v}_{,1} = -\frac{\underset{\omega}{v}}{x^1}$$

und für $\alpha = \lambda \in S'$ dann

$$\underset{\omega}{v}_{,\lambda} = 0.$$

Integration liefert

$$\underset{\omega}{v} = \frac{\underset{\omega}{\pi}(x^\varrho)}{x^1}, \qquad \omega \in T, \ \varrho \in T + \overline{R}. \tag{43}$$

Geht man hiermit in (42) für $\alpha = \nu \in T$ ein, so ergibt sich wegen (35)

$$\underset{\omega}{\pi}_{,\varrho} \underset{\nu}{\pi}_{,\sigma} g^{\varrho\sigma} = 0, \qquad \varrho, \sigma \in T + \overline{R}.$$

Setzt man andererseits (43) in (41) ein, so folgt

$$\underset{\omega}{\pi}_{;\varrho\sigma} = 0.$$

Das Semikolon bezeichnet kovariante Differentiation bezüglich $g_{\varrho\sigma}$. I restlichen gk-Transformationen stecken demnach als Parallelfelder in $g_{\varrho\sigma} dx^\varrho d$ Sie sind unabhängig. Aus $a^\omega \underset{\omega}{\pi}_{,\varrho} = 0$ würde

$$a^\omega \underset{\omega}{v}_{,i} = -a^\omega \underset{\omega}{\pi} \frac{\delta_{1i}}{(x^1)^2} \sim \underset{1}{v}_{,i}$$

folgen. Man bringe $g_{\varrho\sigma} dx^\varrho dx^\sigma$ jetzt auf die kanonische Form von EISENHA R. G. S. 263. Insgesamt hat man dann das Ergebnis:

Gestattet ein V_n r unabhängige gk-Transformationen $\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v} a$ $1 \leqq r < n$, $K \neq 0$, *und ist*

$$Rg\left(\underset{\alpha}{v^i} \underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v} \underset{\beta}{v}\right) = s - 1 < r - 1,$$

so wird eine kanonische Form der Metrik durch

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \dfrac{1}{-c_1 K (x^1)^2} \left(\sum_\lambda e_\lambda (dx^\lambda)^2 - 2 \sum_\varepsilon dx^{s+\varepsilon} dx^{r+\varepsilon} + g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma \right) \\ \qquad \lambda = 1, \ldots, s, \ \varepsilon = 1, \ldots, r-s, \ \varrho, \sigma, \tau = r+1, \ldots \end{array} \right. \tag{44}$$

gegeben. Normierte Erzeugende der Transformationen sind

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{1}{v} = \dfrac{1}{x^1}, \quad \underset{\mu}{v} = \dfrac{1}{\sqrt{-c_1 K}} \dfrac{x^\mu}{x^1}, \quad \underset{\omega}{v} = \dfrac{x^{r-s+\omega}}{x^1}, \\ \qquad \mu = 2, \ldots, s, \quad \omega = s+1, \ldots \end{array} \right. \tag{45}$$

Jeder Raum (44) gestattet nämlich auch die durch (45) erzeugten gk-ansformationen. Es gilt die Ungleichung

6) $$s + 2(r - s) \leqq n.$$

§ 8. Räume konstanter Krümmung und Einstein-Räume.

Für (22) errechnet man die Komponenten des Krümmungstensors zu

$$R_{\alpha\ jk}^{\ i} = K(a_{\alpha j}\delta_k^i - a_{\alpha k}\delta_j^i), \qquad \alpha \in R, \quad i,j,k \in N$$

$$R_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} = B_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} - \frac{K^2}{h^2}\sum e_\alpha (x^\alpha)^2 (a_{\pi\sigma}\delta_\tau^\varrho - a_{\pi\tau}\delta_\sigma^\varrho), \qquad \pi, \varrho, \sigma, \tau \in \overline{R}.$$

abei ist $B_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho}$ der Krümmungstensor bezüglich $g_{\varrho\sigma}(x^\tau)$, h ist in (38) definiert. ntsprechend berechnet man für (35)

$$R_{\alpha\ jk}^{\ i} = K(a_{\alpha j}\delta_k^i - a_{\alpha k}\delta_j^i)$$

$$R_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} = B_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} + K(a_{\pi\sigma}\delta_\tau^\varrho - a_{\pi\tau}\delta_\sigma^\varrho).$$

er Fall (44) wird mit einbegriffen, wenn man sich die parallelen Null-Vektor-elder in $g_{\varrho\sigma}dx^\varrho dx^\sigma$ hineingesteckt denkt.

Ein V_n von konstanter Krümmung K möge mit $S_n(K)$, ein Einstein-aum V_n ($n \geqq 4$) der skalaren Krümmung R mit $E_n\big(R/n(1-n)\big)$ bezeichnet erden. Aus den letzten vier Gleichungen folgt nun:

(I) *Der* V_n (22) *bzw.* (35) *ist dann und nur dann ein* S_n, *wenn* $S_n = S_n(K)$ *, und wenn der durch* $g_{\varrho\sigma}dx^\varrho dx^\sigma$ *definierte* V_{n-r} *ein* $S_{n-r}(K)$ *bzw. ein* $_{n-r}(0)$ *ist.*

(II) *Der* V_n (22) *bzw.* (35) *ist dann und nur dann ein* E_n, *wenn* $E_n = E_n(K)$ *, und wenn der* V_{n-r} *ein* $E_{n-r}(K)$ *bzw. ein* $E_{n-r}(0)$ *ist.*

Zu (I). Für $r = n-1$ erhält man: Der Raum

$$ds^2 = \frac{1}{H^2}\left(\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + h^2 e_n (dx^n)^2\right)$$

ein $S_n(K)$. Dann ist auch (20) für

$$dt^2 = e_n (dx^n)^2$$

n $S_n(K)$. Diese Fundamentalform wurde von Dinghas [3] betrachtet, sie at die Eigenschaft $\mathrm{Det}\, a_{ij} = \Pi\, e_i$. Setzt man $x^n = \mathrm{const}$, so bleibt ein $_{n-1}(K)$. — (35) ergibt für $r = n-1$ einen $S_n(K)$. Für (44) liefert (46) im all $r = n-1$

$$s = n-2,$$

a ja andererseits $s - 1 < r - 1$, also $s + 1 \leqq r$ vorausgesetzt war. Da nun der aum

$$2dx\,dy + a(y)(dy)^2$$

ben ist, so ist im betrachteten Fall auch (44) ein $S_n(K)$. Insgesamt hat man:

Gestattet ein V_n $n-1$ *Funktionen* $\underset{\alpha}{v}$ *mit der Eigenschaft*

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij},$$

nd sind die Vektoren $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ *unabhängig, so ist er ein* $S_n(K)$.

Für einen $S_n(K)$ kann also der Rang der in § 4 betrachteten Matrix du entsprechende Auswahl von n gk-Transformationen sowohl zu n als auch $n-1$ gemacht werden. Das zeigt, daß der in § 4 aufgestellte Satz für $r=$ falsch ist. Für (22) mit $r=n$ erzeugt auch $V=H^{-1}$ eine gk-Transformati Es gilt

$$2hV_{,i} = -K\sum e_k x^k v_{k,i}.$$

Bemerkung 1. Die Transformationen, die auf die kanonischen Form führen, z.B. (14), können komplex sein. Man nehme nämlich einen posi definiten $S_n(K)$ mit $K<0$ in der RIEMANNschen Form (22), $g_{\varrho\sigma}=0$, $e_\gamma=+1$. Die Funktion

$$v=\frac{h}{\sqrt{-K}H}$$

erfüllt die Gleichungen

$$v_{,ij} = -Kv a_{ij}, \qquad v^i v_{,i} = -1-Kvv.$$

Es ist das zugehörige $e=-1$. Mit diesem v kommt man auf dem Wege v § 5 zu einer indefiniten Fundamentalform.

Bemerkung 2. Um die Transformationsgleichungen von zwei isometrisch Räumen $S_n(K)$ und $S_n'(K)$ ineinander zu finden, kann man zuweilen so v gehen: Man bestimme in beiden Räumen alle gk-Transformationen v, v' u wähle daraus je n Funktionen, die in gleicher Weise normiert sind, also d selbe Matrix (10) haben. Man setze dann entsprechende v, v' einander glei und löse nach dem einen Variablensatz auf. Mit dieser Methode wurden z. (21) und (37) bestimmt.

Zu (II). BRINKMANN behandelt in seiner Arbeit [1] das Problem, Einste Räume ds^2 konform auf andere Einstein-Räume $d\bar{s}^2=V^{-2}ds^2$ abzubilden. nennt die Abbildung trivial bzw. eigentlich (proper), wenn $V=$const bz $V^iV_{,i}\neq 0$ ist. Existieren im Fall $R\neq 0$ Abbildungen mit $V\neq$const, so si sie eigentlich. Dann muß V der Gleichung

$$V_{,ij} = -K(V-b)a_{ij}, \qquad R=Kn(1-n) \tag{47}$$

genügen, und jede Lösung dieser Gleichung liefert auch eine Abbildu (II) gibt kanonische Formen für diejenigen E_n, die eigentliche Abbildung gestatten.

Hier soll nun noch die Tatsache beleuchtet werden, daß die konfor Abbildung stets mit einer gk-Transformation verknüpft ist. Man muß wied die Fallunterscheidung machen.

α) § 5 entsprechend darf man annehmen:

$$ds^2 = \frac{1}{H^2}\left(\varepsilon(dx)^2 + h^2 dt_K^2\right), \tag{48}$$

$$H = 1+\frac{K}{4}\varepsilon(x)^2 = 2-h,$$

$$V = a\frac{x}{H}+b. \tag{49}$$

sind Konstanten, die die zur Erlangung der kanonischen Form (22) geführte Normierung wieder aufheben. Zur Abkürzung ist $g_{\varrho\sigma} dx^\varrho dx^\sigma = dt_K^2$ etzt worden. Dann ist

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{(a x + b H)^2} \left(\varepsilon (dx)^2 + h^2 dt_K^2\right).$$

echnet man hierfür $\bar{K}$, so erhält man

$$\frac{\bar{K}}{K} = b^2 - \frac{a^2}{\varepsilon K}.$$

Im Fall $-\varepsilon K > 0$ zeigt (51), daß K und $\bar{K}$ gleiches Vorzeichen haben. wird $\bar{K} \neq 0$. Man setze

$$\sqrt{\frac{K}{\bar{K}}}\, b = \cos C, \qquad \frac{a}{\sqrt{-\varepsilon \bar{K}}} = -\sin C$$

mache in (48) und in (50) die Transformation

$$x = \frac{2}{\sqrt{-\varepsilon K}} \operatorname{tg} \frac{x'}{2}.$$

ergibt sich nach Weglassen der Striche

$$ds^2 = \frac{1}{-K \cos^2 x} \left((dx)^2 + dt_{-1}^2\right), \qquad dt_{-1}^2 = -K\, dt_K^2$$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{-\bar{K} \cos^2 (x + C)} \left((dx)^2 + dt_{-1}^2\right).$$

Ist jedoch $\varepsilon K > 0$, so kann man nur im Fall $\bar{K}/K > 0$ eine analoge Aus- bekommen. Man setze

$$\sqrt{\frac{K}{\bar{K}}}\, b = \cosh C, \qquad \frac{a}{\sqrt{\varepsilon \bar{K}}} = \sinh C$$

mache die Transformation

$$x = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon K}} \operatorname{tgh} \frac{x'}{2}.$$

ergibt sich (ohne Striche)

$$ds^2 = \frac{1}{K \cosh^2 x} \left((dx)^2 + dt_{+1}^2\right), \qquad dt_{+1}^2 = K\, dt_K^2,$$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{\bar{K} \cosh^2 (x + C)} \left((dx)^2 + dt_{+1}^2\right).$$

) § 6 entsprechend darf man annehmen:

$$ds^2 = \frac{1}{-\varepsilon K (x)^2} \left(\varepsilon (dx)^2 + dt_0^2\right)$$

$$V = \frac{1}{x} + b.$$

Fall $b \neq 0$ führe man C und $\bar{K}$ durch

$$b = \pm \sqrt{\frac{\bar{K}}{K}} = \frac{1}{C}$$

ein. Dann wird

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{-\varepsilon \bar{K}(x+C)^2}\left(\varepsilon (dx)^2 + dt_0^2\right).$$

Ein $E_n(K)$, $K \neq 0$, kann, wenn überhaupt, nur dadurch auf einen $\overline{E}_n($ $K\bar{K} > 0$, konform abgebildet werden, daß man eine zu einer gk-Transformat gehörende endliche Transformation ausführt und eine triviale Abbildung fol läßt.

Es wird $\bar{K} = 0$ in den Fällen

α) $K b^2 - \varepsilon a^2 = 0$. Die Rückabbildung entspricht einem $\bar{v}$ mit $\bar{v}_{,ij} =$

β) $b = 0$. Die Rückabbildung entspricht einem parallelen (Nicht-Nu Vektorfeld.

§ 9. Der Fall $K = 0$.

Bezeichnungen wie bisher. Der V_n besitze r unabhängige Vektoren $\underset{\alpha}{v}_{,i}$

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = a_{ij}, \qquad \alpha \in R, \quad 1 < r < n. \tag{52}$$

Er gestattet demnach $r-1$ unabhängige Parallelfelder

$$\underset{\gamma}{\pi}_{,i} = \underset{1}{v}_{,i} - \underset{\gamma}{v}_{,i}, \qquad \underset{\gamma}{\pi}_{,ij} = 0, \qquad \gamma \in R'. \tag{53}$$

[Wenn es keinen weiteren Vektor $v_{,i}$ gibt, der (52) erfüllt und von den unabhängig ist, zeigt man mit dem Satz von S. 336, daß es dann auch k weiteres Parallelfeld $\pi_{,i}$ gibt, das von den $\underset{\gamma}{\pi}_{,i}$ unabhängig ist.] Man ort gonalisiere und normiere die $\underset{\gamma}{\pi}_{,i}$. Man darf also (mit neuen $\underset{\gamma}{\pi}$)

$$\underset{\gamma}{\pi}^i \underset{\varepsilon}{\pi}_{,i} = e_\gamma \delta_{\gamma\varepsilon} \tag{54}$$

annehmen, $e_\gamma = \pm 1$ bzw. $= 0$ für Nullvektoren. Nach S. 335 kann man der Fundamentalform

$$\begin{cases} ds^2 = \varepsilon^{2x^1}\left(\varepsilon (dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\, dx^\varrho\, dx^\tau\right), \\ \underset{1}{v}^i = \delta^i_1, \end{cases} \tag{55}$$

ausgehen. Setzt man

$$\underset{1}{v}^i \underset{\gamma}{\pi}_{,i} = p_\gamma, \tag{56}$$

so zeigt Differentiation wegen (52) und (53), daß $p_\gamma = \underset{\gamma}{\pi} + c_\gamma$ ist. Man c aber $\underset{\gamma}{\pi}$ um eine additive Konstante vermehren und also

$$\underset{1}{v}^i \underset{\gamma}{\pi}_{,i} = \underset{\gamma}{\pi}$$

annehmen. Wegen (55) folgt $\underset{\varrho\gamma}{\pi}_{,1} = \underset{\varrho}{\pi}$, und demnach ist

$$\underset{\gamma}{\pi} = \varepsilon^{x^1} \underset{\gamma}{\omega}(x^\varrho), \qquad \gamma \in R', \quad \varrho \in N'.$$

Die Gleichung $\underset{\gamma}{\pi}_{,ij} = 0$ ist für das Bogenelement (55) äquivalent zu

$$\underset{\gamma}{\omega}_{;\varrho\tau} = -\varepsilon \underset{\gamma}{\omega} g_{\varrho\tau}, \qquad \gamma \in R'.$$

Dabei deutet das Semikolon kovariante Differentiation bezüglich $g_{\varrho\tau}dx^\varrho dx^\tau$ an. Schließlich besagt die Normierung (54) für die $\underset{\gamma}{\omega}$:

$$\underset{\gamma}{\omega}_{,\varrho}\,\underset{\varepsilon}{\omega}_{,\tau}\,g^{\varrho\tau} = -\,\varepsilon\,\underset{\gamma}{\omega}\,\underset{\varepsilon}{\omega} + e_\gamma\,\delta_{\gamma\varepsilon}.$$

Die Parallelfelder von (55) stecken also als gk-Transformationen in $g_{\varrho\tau}dx^\varrho dx^\tau$. Den e_γ entsprechend kann dann $g_{\varrho\tau}dx^\varrho dx^\tau$ auf eine der kanonischen Formen der §§ 5 bis 7 gebracht werden, $K=\varepsilon$.

Bemerkung. Man kann im betrachteten Fall auch zuerst die Parallelfelder herausziehen, also von der kanonischen Form von EISENHART ausgehen, und dann $v_{,ij}=a_{ij}$ berücksichtigen. Sind alle $e_\gamma \neq 0$, so kommt man nach der Umnumerierung $1\to r$, $R'\to R-\{r\}$, zu

$$ds^2 = \sum e_\gamma (dx^\gamma)^2 + e^{2x^r}\left(e_r (dx^r)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\,dx^\varrho\,dx^\tau\right).$$

Sind jedoch einige $e_\delta = 0$, so gelangt man zwar auch zu einer kanonischen Form, aber einige $g_{\varrho\tau}$ müssen noch gewissen Homogenitätsbedingungen in bezug auf gewisse Variable genügen.

Literatur.

[1] BRINKMANN, H. W.: Einstein spaces which are mapped conformally on each other. Math. Ann. **94**, 119—145 (1925). — [2] DELGLEIZE, A.: Sur les équations de Weingarten et les espaces pseudosphérique. Bull. Soc. roy. Sci. Liége **4**, 158—161 (1935). — [3] DINGHAS, A.: Zur Metrik nichteuklidischer Räume. Math. Nachr. **1**, 287—291 (1948). — [4] EISENHART, L. P.: Riemannian Geometry. Princeton 1949, Wiederabdruck. Zitiert als R. G. — [5] FIALKOW, A.: Conformal geodesics. Trans. Amer. Math. Soc. **45**, 443—473 (1939). — [6] FIALKOW, A.: Totally geodesic Einstein spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 423—428 (1939). — [7] SHANKS, E. B.: Homothetic correspondences between Riemannian spaces. Duke Math. J. **17**, 299—311 (1950). — [8] VRANCEANU, G.: Leçons de Géométrie Différentielle. Bucarest 1947. — [9] WONG, Y. C.: Some Einstein spaces with conformally separable fundamental tensors. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 157—194 (1943). — [10] YANO, K.: Concircular geometry II. Integrability conditions of $\varrho_{\mu\nu}=\Phi g_{\mu\nu}$. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 354—360 (1940).

Kiel, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 20. März 1954.)

MEYER-KÖNIG, W., und K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 348—352 (1954)

Über das Taylorsche Summierungsverfahren.

Von

W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER.

Einleitung.

Für jedes α in $0<\alpha<1$ betrachten wir die Transformation

$$\mathfrak{b} = T_\alpha \mathfrak{a} \equiv b_n = (1-\alpha)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \alpha^{k-n} a_k \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

wo also T_α die Gestalt

$$T_\alpha = \operatorname{diag}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n \Delta_T \operatorname{diag} \alpha^k, \qquad \Delta_T = \left\{\binom{k}{n}\right\}$$

hat. Die Reihen b_n sollen dabei im gewöhnlichen Sinn konvergieren. $\mathfrak{T}_\alpha$ se die Menge der $\mathfrak{a}$, für die die b_n erklärt und die Glieder einer konvergenten Reihe sind. Ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}_\alpha$, so heißt die Reihe $\sum a_k$ *summierbar durch das* T_α *Verfahren oder Taylor-Verfahren der Ordnung* α, und zwar *regulär* bzw. *singulär summierbar*, wenn $z=\alpha$ ein regulärer bzw. singulärer Punkt des (wegen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}$ mindestens für $|z|<\alpha$ konvergenten) Funktionselements $a(z) = \sum a_k z^k$ ist Entsprechend definieren wir die Teilmengen $\mathfrak{T}_\alpha^R$ und $\mathfrak{T}_\alpha^S$ von $\mathfrak{T}_\alpha$. Bei reguläre Summierbarkeit sind die $b_n(1-\alpha)^{-n}$ die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $a(z)$ im Punkte $z=\alpha$.

In Satz 1 und 2 untersuchen wir das Gleichungssystem $\mathfrak{b} = T_\alpha \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$ gegeben $\mathfrak{a}$ gesucht), wobei wir uns auf Ergebnisse von BANACH, EIDELHEIT und PÓLYA stützen. Mit Hilfe dieser beiden Sätze zeigen wir, daß es singulär summierbare Reihen gibt (Satz 3), und erledigen eine seither noch offenstehende Frage bei der Indexverschiebung (Satz 4), wodurch die folgende abschließende Feststellung ermöglicht wird: Im Fall $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ ist bei singulärer Summierbarkeit Indexverschiebung allgemein nur in *einer* Richtung gestattet, in allen übrigen Fällen ist beliebige Indexverschiebung möglich. Wir schließen zwei Bemerkungen über die Perfektheit von T_α und über den Vergleich von T_α mit zeilenfiniten Verfahren an.

Bei den Verfahren S_α und T_a' ($0<\alpha<1$, $a>0$; s. unten) liegen die Verhältnisse analog, abgesehen von der Indexverschiebung, die hier uneingeschränkt in beiden Richtungen vorgenommen werden kann, wie bekannt ist. Wir zeigen, wie die fraglichen Aussagen bei S_α unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen bei T_α folgen, und wie ein Ergebnis von R. P. BOAS über das Stieltjessche Momentproblem die Sachlage bei T_a' klärt.

Näheres über die Verfahren T_α, S_α und T_a' findet man bei HARDY [3, S. 218] und MEYER-KÖNIG [4], [5][1]).

T_α.

Satz 1 (Bildraum von T_α). *Zu jedem* $\mathfrak{b}$ *gibt es ein* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{b} = T_\alpha \mathfrak{a}$.

Beweis. Nach PÓLYA [6, S. 244] ist das Gleichungssystem $\mathfrak{c} = \Delta_T \mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{c}$ auflösbar. Aus der oben gegebenen Darstellung von T_α folgt die Behauptung. — Wir hätten auch einen allgemeinen Satz von EIDELHEIT [2] verwenden können.

Satz 2 (Nullraum von T_α). *Die Menge der* $\mathfrak{a}$ *mit* $T_\alpha \mathfrak{a} = 0$ *bildet einen unendlich-dimensionalen linearen Raum.*

Wir erklären dabei $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda \mathfrak{a}$ in natürlicher Weise; 0 steht für $\{0, 0, \ldots\}$. Satz 2 hat zur Folge, daß es in Satz 1 zu jedem $\mathfrak{b}$ unendlich viele Urfolgen $\mathfrak{a}$ gibt.

Beweis. Wäre der genannte Raum nur endlich-dimensional, so könnten wir durch Hinzufügen endlich vieler Zeilen zu T_α eine Matrix T_α^* erhalten, bei der es zu jedem $\mathfrak{b}$ genau ein $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b} = T_\alpha^* \mathfrak{a}$ gäbe. Nach BANACH [1, S. 51] wäre T_α^* dann zeilenfinit (vgl. auch [9]). — Wir hätten auch [6] heranziehen können; unsere Beweismethode gestattet jedoch eine naheliegende Verallgemeinerung des zitierten Banachschen Satzes.

Die Nullösungen $\mathfrak{a} \neq 0$ erfüllen $a_k = o(\alpha^{-k} k^p)$ für jedes reelle p (Anwendbarkeitsbedingung), jedoch $a_k = o(\beta^{-k})$ für kein $\beta > \alpha$ (funktionentheoretisch begründet). Mit $\{a_0, a_1, \ldots\}$ ist auch $\{0, a_0, a_1, \ldots\}$ eine Nullösung und umgekehrt (vgl. den Beweis zu Satz 4).

Satz 3 (Singuläre Summierbarkeit bei T_α). *Für jedes* α *in* $0 < \alpha < 1$ *ist* $\mathfrak{T}_\alpha^R \neq \mathfrak{T}_\alpha$, *d.h. es gibt singulär summierbare Reihen.*

Beweis. Nach Satz 2 wählen wir ein $\mathfrak{a} \neq 0$ mit $T_\alpha \mathfrak{a} = 0$. Dann ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}_\alpha$ (klar), aber nicht $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}_\alpha^R$ (Grund: Identitätssatz für analytische Funktionen). — Bei $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ hätten wir auch eine konvergente Reihe $\sum b_n$ wählen können, so daß das Funktionselement $\sum b_n (1-\alpha)^{-n} (z-\alpha)^n$ in $z = -1 + 2\alpha$ singulär ist. Jedes zu $\mathfrak{b}$ gehörige $\mathfrak{a}$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. — Schließlich kann man bei $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ auch Satz 4 zum Beweis heranziehen.

Über die Indexverschiebung beim T_α-Verfahren ist bis jetzt folgendes bekannt:

Ist $\{a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha$, so ist auch $\{0, a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$,

ist $\{0, a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha$, so ist auch $\{a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha$ $(\frac{1}{2} < \alpha < 1)$,

ist $\{0, a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha^R$, so ist auch $\{a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha^R$ $(0 < \alpha < 1)$.

Wir vervollständigen diese Ergebnisse.

[1]) Weitere Literatur ist in [5] angegeben. Die in der vorliegenden Note zu T und S als Summierungsverfahren für Reihen gehörigen Matrizen T_α und S_α unterscheiden sich je um einen konstanten Faktor von den in [4] mit T_α und S_α bezeichneten Matrizen, die zu T und S als Limitierungsverfahren für Folgen gehören.

Satz 4 (Indexverschiebung bei T_α). *Für jedes* α *in* $0<\alpha\leqq\frac{1}{2}$ *gibt es ein* $\mathfrak{a}'=\{0, a_0, a_1, \ldots\}\in\mathfrak{T}_\alpha$, *so daß* $\mathfrak{a}=\{a_0, a_1, \ldots\}$ *nicht zu* $\mathfrak{T}_\alpha$ *gehört.*

Ein solches $\mathfrak{a}'$ gehört wegen der zuvor genannten Resultate zu $\mathfrak{T}_\alpha^S$.

Beweis. Denken wir uns zu einer gegebenen Folge $\mathfrak{b}$ nach Satz 1 eine T_α-Urfolge $\mathfrak{a}=\{a_0, a_1, \ldots\}$ bestimmt und setzen wir $\mathfrak{a}'=\{0, a_0, a_1, \ldots\}$, $\mathfrak{b}'=T_\alpha\,\mathfrak{a}'$, so gilt

$$b_0'=\alpha\, b_0, \qquad b_n'=(1-\alpha)\, b_{n-1}+\alpha\, b_n \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Wählen wir speziell $b_n=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n$, so gilt $\mathfrak{a}\notin\mathfrak{T}_\alpha$ $\left(\text{wegen } \frac{\alpha-1}{\alpha}\leqq -1\right)$, aber $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{T}_\alpha$ (wegen $b_0'=\alpha$, $b_1'=b_2'=\cdots=0$).

Wir fügen zwei Ergebnisse ohne Beweis an. Fassen wir $\mathfrak{T}_\alpha$ in der üblichen Weise als FK-Raum auf, so ist $\mathfrak{T}_\alpha^R$ die abgeschlossene Hülle der abbrechenden Stellen in $\mathfrak{T}_\alpha$ („teilweise Perfektheit", Beweis mit den Methoden von [10]). — T_α ist keinem zeilenfiniten Verfahren äquivalent. (Man zeigt, daß $\mathfrak{T}_\alpha$ kein BK-Raum ist.)

S_α.

Beim S_α-Verfahren betrachten wir zu jedem α in $0<\alpha<1$ die Transformation

$$\mathfrak{b}=S_\alpha\,\mathfrak{a}\equiv b_n=\alpha(1-\alpha)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\alpha^k a_k \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

wo also S_α die Gestalt

$$S_\alpha=\alpha\,\mathrm{diag}\,(1-\alpha)^n\Delta_S\,\mathrm{diag}\,\alpha^k, \qquad \Delta_S=\left\{\binom{n+k}{k}\right\}$$

hat. Genau so wie bei T_α erklären wir $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}_\alpha^R$, $\mathfrak{S}_\alpha^S$. Bei regulärer Summierbarkeit sind die $b_n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-n}$ die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\, z^{-k-1}$ im Punkte $z=\frac{1}{\alpha}$.

Wir führen für $0<\alpha<1$ die (zeilenfinite) Matrix

$$E_\alpha=\alpha\,\mathrm{diag}\,(1-\alpha)^n\,\Delta_E\,\mathrm{diag}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k, \qquad \Delta_E=\left\{\binom{n}{k}\right\}$$

ein[2]). Zu gegebenem $\mathfrak{b}$ gibt es genau ein $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}=E_\alpha\,\mathfrak{a}$. Aus

$$\Delta_E\,\Delta_T=\Delta_S$$

folgt unmittelbar

$$E_\alpha\,T_\alpha=S_\alpha$$

(vgl. [4, S. 277]). Existiert eine der beiden Transformationen $T_\alpha\,\mathfrak{a}$ und $S_\alpha\,\mathfrak{a}$, so existiert auch die andere und ist $E_\alpha(T_\alpha\,\mathfrak{a})=S_\alpha\,\mathfrak{a}$. Es folgt, *daß es zu jedem* $\mathfrak{b}$ *ein* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{b}=S_\alpha\,\mathfrak{a}$ *gibt, daß der Nullraum von* S_α *mit dem Nullraum von* T_α *übereinstimmt und daß mit* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{T}_\alpha^S$ *auch* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{S}_\alpha^S$ *gilt.*

[2]) E_α ist die zum Euler-Knoppschen Verfahren, aufgefaßt als Summierungsverfahren für Reihen $\sum a_k$, gehörige Matrix: $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}_\alpha$ heißt, daß die Glieder der Folge $\mathfrak{b}=E_\alpha\,\mathfrak{a}$ die Glieder einer konvergenten Reihe sind.

T_a'.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{V}$ die Klasse der Funktionen $s(x)$, die für $x \geqq 0$ definiert und für jedes $x_0 > 0$ in $0 \leqq x \leqq x_0$ von beschränkter Schwankung sind. Zu einem $s(x) \in \mathfrak{V}$, das wir auch mit $\mathfrak{s}$ bezeichnen, betrachten wir für jedes $a > 0$ die Transformation

$$\mathfrak{b} = T_a' \mathfrak{s} \equiv b_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-a x} \, ds(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Die Integrale sind im Riemann-Stieltjesschen Sinn zu verstehen und sollen im gewöhnlichen Sinn konvergieren: $\int_0^\infty = \lim_{x \to \infty} \int_0^x$. $\mathfrak{T}_a'$ sei die Menge aller $\mathfrak{s}$, für die die b_n erklärt und die Glieder einer konvergenten Reihe sind. Ist $\mathfrak{s} \in \mathfrak{T}_a'$, so heißt das Integral $\int_0^\infty ds(x)$ *summierbar durch das T_a'-Verfahren oder Taylor-Verfahren der Ordnung a*, und zwar *regulär* bzw. *singulär summierbar*, wenn $z = a$ ein regulärer bzw. singulärer Punkt des (wegen $\mathfrak{s} \in \mathfrak{T}_a'$ mindestens für $\Re z > a$ konvergenten) Funktionselements $S(z) = \int_0^\infty e^{-z x} \, ds(x)$ ist. Entsprechend definieren wir die Teilmengen $\mathfrak{T}_a'^R$ und $\mathfrak{T}_a'^S$ von $\mathfrak{T}_a'$. Bei regulärer Summierbarkeit sind die $b_n (-a)^{-n}$ die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $S(z)$ im Punkte $z = a$.

Um zu zeigen, *daß es zu jedem $\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{s} \in \mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{b} = T_a' \mathfrak{s}$ gibt*, denken wir uns ein $\mathfrak{t} \in \mathfrak{V}$ mit

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty x^n \, dt(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

bestimmt, was nach R. P. Boas möglich ist (vgl. [6, S. 243], [7, S. 103], [8, S. 139]);

$$s(x) = \int_0^x e^{a y} \, dt(y) \qquad (x \geqq 0)$$

hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Aus den a. a. O. enthaltenen Resultaten folgt weiter, *daß der Nullraum von T_a' unendlich-dimensional in folgendem Sinn ist*: Zu jedem natürlichen m gibt es m in $x \geqq 0$ normalisierte (vgl. [8, S. 13]) und linear unabhängige $\mathfrak{s}_i \in \mathfrak{V}$ mit $T_a' \mathfrak{s}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Wir wählen z. B. m normalisierte $\mathfrak{u}_i \in \mathfrak{V}$ mit

$$\int_0^\infty x^n \, du_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 2i - 1 \\ 0 & \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots; n \neq 2i - 1 \end{cases}$$

und setzen $t_i(x) = u_i(\sqrt{x})$ (vgl. [8, S. 140]). Dann sind die $\mathfrak{t}_i \in \mathfrak{V}$ normalisiert und gilt

$$\int_0^\infty x^n \, dt_i(x) = \int_0^\infty x^{2n} \, du_i(x) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Setzen wir weiter

$$s_i(x) = \int_0^x e^{ay}\, dt_i(y), \qquad t_i(x) = \int_0^x e^{-ay}\, ds_i(y) \qquad (x \geqq 0),$$

so sind die $s_i(x)$ normalisiert und im Nullraum von T_a' gelegen, ferner sind sie linear unabhängig, denn aus $\sum_i c_i\, s_i(x) = 0$ folgt $\sum_i c_i\, u_i(x) = 0$ und wegen der Momenteigenschaften der u_i daraus $c_i = 0$.

Um zu zeigen, *daß* $\mathfrak{T}_a'^S$ *nicht leer ist*, wählen wir ein normalisiertes nicht konstantes $\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}$ mit $T_a'\, \mathfrak{z} = 0$. Wäre $\mathfrak{z} \in \mathfrak{T}_a'^R$, so wäre $S(z) = 0$, also $s(x)$ doch konstant. Somit ist $\mathfrak{z} \in \mathfrak{T}_a'^S$.

Literatur.

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] Eidelheit, M.: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen (II). Studia math. **7**, 150—154 (1938). — [3] Hardy, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [4] Meyer-König, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304 (1950). — [5] Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen. Math. Z. **56**, 179—205 (1952). — [6] Pólya, G.: Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen. Comm. math. Helvet. **11**, 234—252 (1938/39). — [7] Shohat, J. A., and J. D. Tamarkin: The problem of moments. New York 1943. — [8] Widder, D. V.: The Laplace transform. Princeton 1946. — [9] Zeller, K.: *FK*-Räume und Matrixtransformationen. Math. Z. **58**, 46—48 (1953). — [10] Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. Math. **4**, 425—431 (1953).

Stuttgart, Liststr. 51.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. April 1954.)

Nitsche, J.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 353—366 (1954)

Randwertprobleme für die Verbiegung positiv gekrümmter Flächenstücke.

Von

Joachim Nitsche.

Als Einbettungsproblem bezeichnet man die Aufgabe, eine Fläche mit vorgegebenem Linienelement im Raum zu bestimmen. Unter der Voraussetzung analytischer Koeffizienten hat M. Janet [4] einen Existenzsatz bewiesen. Aus neuerer Zeit stammt ein Beweis von Hartmann und Winter [3], die von den Koeffizienten der ersten Grundform nur dreimalige stetige Differenzierbarkeit fordern. In diesen Arbeiten wird die Existenz von Flächen mit dem gegebenen Linienelement gezeigt. Im allgemeinen gibt es deren unendlich viele. Sie sind Verbiegungen voneinander, d.h. alle isometrisch aufeinander abgebildet. Es ist naheliegend zu untersuchen, durch welche Eigenschaften sich die verschiedenen möglichen Flächen unterscheiden bzw. wie sie sich charakterisieren lassen.

Die Bestimmung von Biegeflächen ist äquivalent mit dem Auffinden von Lösungen der Gauß-Codazzischen Gleichungen. In diesen treten die drei Koeffizienten der zweiten Grundform auf. Einer von ihnen läßt sich noch eliminieren, und es ergibt sich ein quasilineares System von Differentialgleichungen für zwei gesuchte Funktionen in zwei Variabeln. Dies ist für Flächen positiver Gaußscher Krümmung elliptisch.

In der vorliegenden Arbeit sollen berandete, positiv gekrümmte Flächenstücke betrachtet werden. Sie seien auf die Parameter x^1, x^2 bezogen. Bedeutet dann T das Gebiet der x^1, x^2-Ebene, dem das Flächenstück entspricht, so ist nach den eben gemachten Bemerkungen das Biegeproblem äquivalent mit der Bestimmung zweier stetig differenzierbarer Funktionen $u(x^1, x^2)$, $v(x^1, x^2)$, welche in T Lösungen des quasilinearen elliptischen Systems sind. Wie bei der Behandlung elliptischer Differentialgleichungen üblich, wird auf dem Rande S von T eine Randbedingung an u, v gestellt

$$\Pi(u, v; s) - \pi(s) = 0 \qquad (s \text{ Bogenlänge von } S). \tag{1}$$

Da die Funktionen u, v aus den Koeffizienten der zweiten Grundform gebildet sind, läßt sich der Ausdruck $\Pi(u, v; s)$ als geometrische Eigenschaft der Randkurve bzw. des Randstreifens der zu bestimmenden Fläche interpretieren. Gelingt der Nachweis, daß die Lösungen $u(x^i)$, $v(x^i)$ der Gauß-Codazzischen Gleichungen durch die Randbedingung eindeutig bestimmt sind, so ist die eingangs gestellte Frage nach einer Charakterisierung einer speziellen Fläche

unter der Gesamtheit der zu ihr isometrischen Flächen beantwortet. Man kann dann sagen, daß der Wert $\pi(s)$ der durch die Funktion Π ausgedrückten Krümmungseigenschaft des Randes das Flächenstück im Raum eindeutig bestimmt. Daran anschließend ist zu untersuchen, ob auch zu gegebener Funktion $\pi(s)$ stets eine Biegefläche existiert.

Zunächst erhebt sich aber die Schwierigkeit einer Auswahl zweckmäßiger Randbedingungen. Bei einem quasilinearen System hat der Begriff einer *linearen* Randbedingung, die sich also in der Form $a\,u+b\,v+c=0$ schreiben läßt, keinen unmittelbaren Sinn, weil die unbekannten Funktionen einer beliebigen umkehrbaren Transformation

$$u=\Phi(\tilde{u},\tilde{v};\,x^i),\qquad v=\Psi(\tilde{u},\tilde{v};\,x^i) \tag{2}$$

unterworfen werden dürfen. Für $\tilde{u},\tilde{v}$ ergibt sich dann nämlich wieder ein quasilineares System, während die Linearität der Randbedingung nicht erhalten bleibt. Es erscheint wünschenswert, eine Klasse von Randbedingungen abzugrenzen, die durch besondere Eigenschaften analytischer oder geometrischer Natur ausgezeichnet sind, unabhängig davon, welche Gestalt sie bei einer speziellen Wahl der gesuchten Funktionen besitzen. Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich derartige Randbedingungen auszeichnen lassen. Den Ausgangspunkt bilden Integralrelationen, d. h. Beziehungen der allgemeinen Form

$$\oint_S M(u,v;\,s)\,ds=\iint_T N(u,v,u_{x^i},v_{x^i};\,x^i)\,dx^1\,dx^2, \tag{3}$$

die für jedes Lösungspaar der Gauß-Codazzischen Gleichungen bestehen und einen Zusammenhang der Werte von u, v und ihrer Ableitungen in den Punkten von T und S herstellen. Es kann stets erreicht werden, daß unter dem Flächenintegral keine Ableitungen von u, v auftreten (vgl. NITSCHE [6]):

$$N\equiv N(u,v;\,x^i). \tag{A}$$

Die gewünschte Auswahl der betrachteten Randbedingungen (1) wird dann durch die Forderung gewonnen: Die in die Randbedingung eingehende Funktion $\Pi(u,v;\,s)$ soll so beschaffen sein, daß das Randintegral in (3) vermöge der gestellten Randbedingung unabhängig von u, v ist und nur von der Funktion $\pi(s)$ abhängt. In Formeln lautet also die Forderung

$$\frac{\partial(M,\Pi)}{\partial(u,v)}=0. \tag{B}$$

Eine derartige Randbedingung besitzt folgenden Aufbau: a und b seien die geodätische Windung und die Normalkrümmung des Randstreifens der gesuchten Biegefläche, und $F(U,V;\,s)$ sei eine beliebige Potentialfunktion in U, V und hänge noch von der Bogenlänge von S ab. Dann ist in (1)

$$\Pi\equiv b\cdot F\left(\frac{\sqrt{K}}{b},\,\frac{a}{b};\,s\right) \tag{4}$$

zu setzen, wobei K die Gaußsche Krümmung bezeichnet.

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn die Potentialfunktion F linear in U, V ist. Alsdann ergibt sich nämlich als Randbedingung

5) $$\Pi \equiv \alpha(s)\, b + \beta(s)\, a + \gamma(s).$$

Zu den zugelassenen Randbedingungen gehören also auch die, bei denen längs des Randes eine lineare Beziehung zwischen der Normalkrümmung und der geodätischen Windung besteht.

I. Die Gauß-Codazzischen Gleichungen.

Eine Fläche mit der Metrik

(I 1) $$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

ω^1, ω^2 sind zwei unabhängige Linearformen in den Variabeln x^1, x^2) ist bestimmt, wenn zu ω^1, ω^2 drei weitere Formen $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ bekannt sind, die den Gleichungen

(I 2) $$\begin{cases} d\omega^1 - [\omega_{12}\omega^2] = 0, \qquad d\omega^2 + [\omega_{12}\omega^1] = 0, \\ [\omega_{13}\omega^1] + [\omega_{23}\omega^2] = 0, \\ d\omega_{12} - [\omega_{23}\omega_{13}] = 0, \quad d\omega_{13} + [\omega_{23}\omega_{12}] = 0, \quad d\omega_{23} - [\omega_{13}\omega_{12}] = 0 \end{cases}$$

genügen (vgl. Blaschke [1], S. 44). Führen wir die Funktionen $q, \bar{q}$ durch

(I 3) $$d\omega^1 = q\,[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^2 = -\bar{q}\,[\omega^1\omega^2]$$

ein, so folgt aus den zwei ersten Gleichungen (I 2)

(I 4) $$\omega_{12} = q\,\omega^1 - \bar{q}\,\omega^2.$$

Da ω^1, ω^2 unabhängige Formen sind, können wir ω_{13}, ω_{23} aus diesen kombinieren und erhalten unter Berücksichtigung der dritten Gl. (I 2)

(I 5) $$\omega_{13} = r\,\omega^1 + n\,\omega^2, \qquad \omega_{23} = n\,\omega^1 + \bar{r}\,\omega^2$$

mit drei neuen Funktionen $r, \bar{r}, n$. Durch Einsetzen von (I 4, 5) in die restlichen Gln. (I 2) gewinnen wir das System der Gauß-Codazzischen Gleichungen:

(I 6) $$\begin{cases} d(r\,\omega^1 + n\,\omega^2) = (q\,\bar{r} + \bar{q}\,n)\,[\omega^1\omega^2] \\ d(n\,\omega^1 + \bar{r}\,\omega^2) = (\bar{q}\,r + q\,n)\,[\omega^2\omega^1] \\ d(q\,\omega^1 - \bar{q}\,\omega^2) = -(r\,\bar{r} - n^2)\,[\omega^1\omega^2]. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung läßt sich noch umformen. Da nämlich

(I 7) $$\mathrm{II} = \omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23} = r(\omega^1)^2 + 2n\,\omega^1\omega^2 + \bar{r}\,(\omega^2)^2$$

die zweite Grundform der Fläche ist, finden wir mit (I 1)

(I 8) $$K = r\,\bar{r} - n^2$$

für die Gaußsche Krümmung der Fläche, die sich demnach durch die Invarianten der Formen ω^1, ω^2 vermöge

(I 9) $$d(q\,\omega^1 - \bar{q}\,\omega^2) = -K\,[\omega^1\omega^2]$$

ausdrückt. Da $q, \bar{q}$ aus ω^1, ω^2 allein berechenbar sind, gilt dasselbe von K. Gl. (I 6_3) kann durch (I 8) ersetzt werden.

Von den Koeffizienten von dx^i in den Formen ω^α wollen wir für das weitere voraussetzen, sie seien analytische Funktionen der Flächenparameter x^1, x^2 innerhalb eines gewissen Gebietes D der x^1, x^2-Ebene. Dann gilt dasselbe von K. Da wir uns auf Flächen positiver Krümmung beschränken wollen, fordern wir noch

$$K > 0 \quad \text{in } D. \tag{I 10}$$

II. Das quasilineare Differentialgleichungssystem.

Bezeichnen wir die Pfaffschen Ableitungen bezüglich der Formen ω^1, ω^2 durch angehängte Indizes, so schreiben sich die Gauß-Codazzischen Gleichungen auch in der Form

$$\left\{\begin{aligned} r_2 - n_1 &= q(r - \bar{r}) - 2\bar{q}\,n \\ \bar{r}_1 - n_2 &= \bar{q}(\bar{r} - r) - 2q\,n \\ r\bar{r} - n^2 &= K. \end{aligned}\right. \tag{II 1}$$

Auf Grund der Gaußschen Gl. (II 1_3) läßt sich eine der drei Funktionen $r, \bar{r}, n$ eliminieren. So ergibt sich ein quasilineares System für zwei gesuchte Funktionen. Es ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem die Fläche positive, verschwindende oder negative Krümmung besitzt (vgl. NITSCHE [5]). In unserem Falle $K > 0$ lassen sich die Differentialgleichungen auf eine „elliptische Normalform" transformieren (vgl. NITSCHE [6]), indem einerseits geeignete Funktionen verwendet, andererseits die Gleichungen in passender Weise kombiniert werden.

Zu dem Ende stellen wir zunächst einige Formeln zusammen, die eine Folge der Gln. (II 1) bzw. (I 6), (I 8) sind:

$$\left\{\begin{aligned} d(r\omega^1 + n\omega^2) &= (q\bar{r} + \bar{q}\,n)[\omega^1\omega^2] \\ d(n\omega^1 + \bar{r}\omega^1) &= (\bar{q}\,r + q\,n)[\omega^2\omega^1] \\ r\bar{r} - n^2 &= K. \end{aligned}\right. \tag{II 2}$$

Führen wir durch

$$\left\{\begin{aligned} \varphi^1 &= k\omega^1, & \Phi^1 &= r\omega^1 + n\omega^2 \\ \varphi^2 &= n\omega^1 + \bar{r}\,\omega^2, & \Phi^2 &= k\omega^2 \end{aligned}\right\} \qquad (k = +\sqrt{K}) \tag{II 3}$$

zwei Paare unabhängiger Pfaffscher Formen φ^1, φ^2 und Φ^1, Φ^2 ein, so gilt nach (II 2)

$$\left\{\begin{aligned} d\varphi^1 &= -(k_2 - q\,k)[\omega^1\omega^2], & d\Phi^1 &= (q\bar{r} + \bar{q}\,n)[\omega^1\omega^2] \\ d\varphi^2 &= (\bar{q}\,r + q\,n)[\omega^2\omega^1], & d\Phi^2 &= -(k_1 - \bar{q}\,k)[\omega^2\omega^1]. \end{aligned}\right. \tag{II 4}$$

Φ^1, Φ^2 lassen sich als Linearkombinationen von φ^1 und φ^2 darstellen:

$$\Phi^1 = v\varphi^1 + u\varphi^2, \quad \Phi^2 = -u\varphi^1 + v\varphi^2. \tag{II 5}$$

Dabei ergeben sich die Werte

$$u = \frac{n}{\bar{r}}, \qquad v = \frac{k}{\bar{r}}. \tag{II 6}$$

Man kann stets (nötigenfalls nach Umorientierung des Normalenvektors) $\bar{r} > 0$ und damit auch $v > 0$ erreichen. Wegen (II 2_3) berechnen sich $r, \bar{r}, n$ aus u, v vermöge

$$r = k\frac{u^2 + v^2}{v}, \qquad n = k\frac{u}{v}, \qquad \bar{r} = k\frac{1}{v}. \tag{II 7}$$

Werden diese Ausdrücke für die Koeffizienten der zweiten Grundform in die Gl. (II 1) eingesetzt, so resultiert ein quasilineares Differentialgleichungssystem für u, v. Dieses erhalten wir auch dadurch, daß wir die äußeren Differentiale der Linearkombinationen (II 5) für Φ^1 und Φ^2 mit den in (II 4) berechneten gleichsetzen. Zum Zwecke der besseren Darstellung verwenden wir die Pfaffschen Ableitungen bezüglich der Formen φ^1 und φ^2. Sie sollen durch vorgesetzte ∇_1 und ∇_2 bezeichnet werden. Für das totale Differential einer stetig differenzierbaren Funktion $h(x^i)$ gilt dann

$$dh = h_{x^i}\, dx^i = h_1\, \omega^1 + h_2\, \omega^2 = (\nabla_1 h)\, \varphi^1 + (\nabla_2 h)\, \varphi^2,$$

woraus

$$\begin{cases} \nabla_1 h = \frac{1}{k} h_1 - \frac{n}{k\bar{r}} h_2 \\ \nabla_2 h = \frac{1}{\bar{r}} h_2 \end{cases} \tag{II 8}$$

folgt. Jetzt liefert die Differentiation

$$\begin{aligned} d\Phi^1 &\equiv d(v\varphi^1 + u\varphi^2) = (\nabla_1 u - \nabla_2 v)\,[\varphi^1 \varphi^2] + u\, d\varphi^2 + v\, d\varphi^1 \\ &= \{k\bar{r}(\nabla_1 u - \nabla_2 v) - v(k_2 - q\,k) - u(\bar{q}\,r + q\,n)\}\,[\omega^1 \omega^2]. \end{aligned}$$

Bei Vergleich mit (II 4) ergibt sich somit

$$\nabla_1 u - \nabla_2 v = \frac{q\,\bar{r} + \bar{q}\,n}{k\bar{r}} + \frac{\bar{q}\,r + q\,n}{k\bar{r}}\, u + \frac{k_2 - q\,k}{k\bar{r}}\, v.$$

Setzen wir nun überall für $r, \bar{r}, n$ die Ausdrücke (II 7) ein, so erhalten wir

$$\nabla_1 u - \nabla_2 v = \frac{k_2 - q\,k}{k^2}\, v^2 + \frac{1}{k}\{q(1 + u^2) + \bar{q}(u + u^3 + u\,v^2)\}. \tag{II 9}$$

Jetzt hängen allerdings die Differentiationen ∇_1 und ∇_2 von u, v ab:

$$\begin{cases} \nabla_1 h = \frac{1}{k} h_1 - \frac{u}{k} h_2 \\ \nabla_2 h = \frac{v}{k} h_2, \end{cases} \tag{II 10}$$

ebenso wie die Pfaffschen Formen φ^1 und φ^2:

$$\varphi^1 = k\,\omega^1, \qquad \varphi^2 = k\frac{u}{v}\,\omega^1 + k\frac{1}{v}\,\omega^2. \tag{II 11}$$

Durch Differentiation von Φ^2 (II 5_2) gewinnen wir entsprechend noch die Gleichung

$$\text{(II 9)} \quad \nabla_2 u + \nabla_1 v = \frac{k_1 - \bar{q}\,k}{k^2}\,v - \frac{k_2 - q\,k}{k^2}\,u\,v + \frac{1}{k}\{q\,u\,v + \bar{q}\,v(u^2+v^2)\}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\text{(II 12)} \quad \begin{cases} F(u,v;x^i) = \dfrac{k_2 - q\,k}{k^2}\,v^2 + \dfrac{1}{k}\{q(1+u^2) + \bar{q}\,u(1+u^2+v^2)\} \\ G(u,v;x^i) = \dfrac{k_1 - \bar{q}\,k}{k^2}\,v - \dfrac{k_2 - q\,k}{k^2}\,u\,v + \dfrac{1}{k}\{q\,u\,v + \bar{q}\,v(u^2+v^2)\} \end{cases}$$

schreiben wir dafür auch

$$\text{(II 13)} \quad \begin{cases} \nabla_1 u - \nabla_2 v = F(u,v;x^i) \\ \nabla_2 u + \nabla_1 v = G(u,v;x^i). \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen die gewünschte Normalform des quasilinearen Systems dar. Es gilt der Satz:

Satz 1. *Sind u, v mit den Koeffizienten $r, \bar{r}, n$ der zweiten Grundform gemäß* (II 6) *gebildet und erfüllen $r, \bar{r}, n$ die Gauß-Codazzischen Gln.* (II 2), *so befriedigen u, v das quasilineare System* (II 13).

Die Gln. (II 13) sind aber dem Codazzischen System äquivalent, es gilt nämlich der

Satz 2. *Sind $u(x^i)$, $v(x^i)$ in einem gewissen Gebiet D der x^1, x^2-Ebene stetig differenzierbare Funktionen der Variabeln x^1, x^2 und Lösungen von* (II 13) *und gilt dort $v > 0$, so genügen die durch* (II 7) *aus u, v abgeleiteten Funktionen $r, \bar{r}, n$ den Gauß-Codazzischen Gleichungen.*

Zum Beweise definieren wir die Funktionen $r, \bar{r}, n$ durch

$$r \equiv k\,\frac{u^2+v^2}{v}, \qquad n \equiv k\,\frac{u}{v}, \qquad \bar{r} \equiv k\,\frac{1}{v}.$$

Damit lassen sich F und G auch in der Form

$$F = \frac{k_2 - q\,k}{k\,\bar{r}}\,v + \frac{\bar{q}\,r + q\,n}{k\,\bar{r}}\,u + \frac{q\,\bar{r} + \bar{q}\,n}{k\,\bar{r}},$$

$$G = -\frac{k_2 - q\,k}{k\,\bar{r}}\,u + \frac{\bar{q}\,r + q\,n}{k\,\bar{r}}\,v + \frac{k_1 - \bar{q}\,k}{k\,\bar{r}}$$

schreiben. Multiplikation von (II 13_2) mit

$$[\varphi^1\varphi^2] = k^2 \cdot \frac{1}{v}\,[\omega^1\omega^2] = k\,\bar{r}\,[\omega^1\omega^2]$$

liefert die Beziehung

$$\text{(II 14)} \quad \begin{cases} (\nabla_2 u + \nabla_1 v)\,[\varphi^1\varphi^2] \\ = -\,u(k_2 - q\,k)\,[\omega^1\omega^2] + v(\bar{q}\,r + q\,n)\,[\omega^1\omega^2] + (k_1 - \bar{q}\,k)\,[\omega^1\omega^2]. \end{cases}$$

Die linke Seite kann partiell integriert werden:

$$(\nabla_2 u + \nabla_1 v)\,[\varphi^1\varphi^2] = d(-u\,\varphi^1 + v\,\varphi^2) + u\,d\varphi^1 - v\,d\varphi^2.$$

Da nun $-u\varphi^1+v\varphi^2=k\omega^2$ ist, so ergibt sich

$$d(-u\varphi^1+v\varphi^2)=(k_1-\bar{q}\,k)\,[\omega^1\omega^2].$$

Zusammen mit $\varphi^1=k\omega^1$, d.h. $d\varphi^1=-(k_2-q\,k)\,[\omega^1\omega^2]$ ist demnach

$$d(-u\varphi^1+v\varphi^2)+u\,d\varphi^1-v\,d\varphi^2$$
$$=(k_1-\bar{q}\,k)\,[\omega^1\omega^2]-u(k_2-q\,k)\,[\omega^1\omega^2]-v\,d\varphi^2,$$

und (II 14) geht in

$$-v\,d\varphi^2=v(\bar{q}\,r+q\,n)\,[\omega^1\omega^2]$$

über. Nach Voraussetzung ist $v>0$. Damit haben wir die Gültigkeit von

$$d\varphi^2=d(n\omega^1+\bar{r}\,\omega^2)=(\bar{q}\,r+q\,n)\,[\omega^2\omega^1],$$

d.h. der einen Codazzischen Gleichung gezeigt. Ähnlich beweist sich auch die Differentialgleichung

$$d(r\omega^1+n\omega^2)=(q\,\bar{r}+\bar{q}\,n)\,[\omega^1\omega^2].$$

Da schließlich nach (II 8) stets

$$r\bar{r}-n^2=k^2=K$$

erfüllt ist, besteht (II 2). Damit ist alles bewiesen.

III. Integralrelationen für Lösungen des Codazzischen Systems.

Ohne jetzt zu berücksichtigen, daß die Differentialgleichungen (II 13) aus den Gauß-Codazzischen Gleichungen hervorgegangen und diesen äquivalent sind, wollen wir das System (II 13) näher untersuchen. Und zwar soll gezeigt werden, in welcher Weise sich für Lösungen der Differentialgleichungen besonders einfache Integralrelationen gewinnen lassen.

Wir gehen so vor: Mit den nach (II 11) erklärten Formen φ^1, φ^2 und zwei vorläufig willkürlichen, nach ihren vier Argumenten u, v, x^1, x^2 stetig differenzierbaren Funktionen $A(u, v; x^i)$ und $B(u, v; x^i)$ setzen wir

(III 1) $$\vartheta=B\varphi^1+A\varphi^2$$

und wenden auf diese Differentialform den Gaußschen Integralsatz für einen Bereich $\overline{T}+\overline{S}$ an:

(III 2) $$\oint\limits_{\overline{S}}\vartheta=\iint\limits_{\overline{T}}d\vartheta.$$

Von den auftretenden Funktionen $u(x^i)$ und $v(x^i)$ fordern wir zunächst nur stetige Differenzierbarkeit und

(III 3) $$v>0 \quad \text{in} \quad \overline{T}+\overline{S}.$$

Indem mit ∇_1 und ∇_2 wieder die Ableitungen (II 10) bezeichnet werden, läßt sich für $d\vartheta$ auch

(III 4) $$d\vartheta=(\nabla_1 A-\nabla_2 B)\,[\varphi^1\varphi^2]+B\,d\varphi^1+A\,d\varphi^2$$

schreiben. Nach (II 7) und (II 4) gilt für die Differentiale der Formen φ^1, φ^2

$$\text{(III 5)} \quad \begin{cases} d\varphi^1 = -(k_2 - q\,k)\,[\omega^1\omega^2] = -\frac{k_2 - q\,k}{k^2}\,v\,[\varphi^1\varphi^2] \\ d\varphi^2 = -(\bar{q}\,r + q\,n)\,[\omega^1\omega^2] = -\frac{1}{k}\,\{\bar{q}\,(u^2+v^2) + q\,u\}\,[\varphi^1\varphi^2]. \end{cases}$$

Deshalb geht (III 4) mit den Abkürzungen

$$\text{(III 6)} \qquad p = -\frac{k_2 - q\,k}{k^2}\,v, \quad \bar{p} = +\frac{1}{k}\,\{\bar{q}\,(u^2+v^2) + q\,u\}$$

nunmehr in

$$d\vartheta = (\nabla_1 A - \nabla_2 B + p\,B - \bar{p}\,A)\,[\varphi^1\varphi^2]$$

über. Schließlich gilt noch

$$\nabla_1 A = A_u \nabla_1 u + A_v \nabla_1 v + A_{x^i} \nabla_1 x^i,$$
$$\nabla_2 B = B_u \nabla_2 u + B_v \nabla_2 v + B_{x^i} \nabla_2 x^i.$$

Die Beziehung (III 2) lautet also ausgeschrieben

$$\text{(III 7)} \quad \begin{cases} \oint\limits_{\bar{S}} B\,\varphi^1 + A\,\varphi^2 \\ \qquad = \iint\limits_{\bar{T}} \{A_u \nabla_1 u + A_v \nabla_1 v - B_u \nabla_2 u - B_v \nabla_2 v\}\,[\varphi^1\varphi^2] + \\ \qquad\quad + \iint\limits_{\bar{T}} \{A_{x^i} \nabla_1 x^i - B_{x^i} \nabla_2 x^i - \bar{p}\,A + p\,B\}\,[\varphi^1\varphi^2]. \end{cases}$$

Eine solche Gleichung wollen wir Integralrelation nennen. Jedes Funktionenpaar $A(u, v; x^i)$, $B(u, v; x^i)$ führt auf eine Integralrelation.

Werden die in (III 7) eingehenden Funktionen $u(x^i)$, $v(x^i)$ auf Lösungen der Differentialgleichungen (II 13) beschränkt, so läßt sich sofort eine besonders einfache Klasse von Integralrelationen aussondern. Genügen nämlich die Hilfsfunktionen A und B in ihrer Abhängigkeit von u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\text{(III 8)} \qquad A_u = B_v, \quad A_v = -B_u,$$

so wird bei Bestehen von (II 13)

$$A_u \nabla_1 u + A_v \nabla_1 v - B_u \nabla_2 u - B_v \nabla_2 v$$
$$= A_u(\nabla_1 u - \nabla_2 v) + A_v(\nabla_2 u + \nabla_1 v) = F A_u + G A_v.$$

Damit geht (III 7) in

$$\text{(III 9)} \quad \begin{cases} \oint\limits_{\bar{S}} B\,\varphi^1 + A\,\varphi^2 \\ \qquad = \iint\limits_{\bar{T}} \{F A_u + G A_v + A_{x^i} \nabla_1 x^i - B_{x^i} \nabla_2 x^i - \bar{p}\,A + p\,B\}\,[\varphi^1\varphi^2 \end{cases}$$

über.

Satz 3. *Genügen die in* (III 1) *eingeführten Hilfsfunktionen A und B in ihrer Abhängigkeit von u, v den Cauchy-Riemannschen Gleichungen und sind $u(x^i), v(x^i)$ Lösungen der Codazzischen Gln.* (II 13), *so treten in der zugehörigen Integralrelation keine Ableitungen von u und v auf.*

Die Differentialgleichungen (III 8) sind aber auch in gewissem Sinne notwendig für das Fehlen der Ableitungen von u und v. Zunächst definieren wir: Die Integralrelation (III 7) heißt frei von Ableitungen der gesuchten Funktionen u, v, wenn sich der Integrand des Flächenintegrales in jedem Punkt $\mathring{x}^i \in \overline{T}$ allein durch die Werte $\mathring{u}$ und $\mathring{v}$ bestimmt, welche ein beliebiges in dem Bereich $\overline{T} + \overline{S}$ stetig differenzierbares Lösungspaar u, v der Gln. (II 13) in $\mathring{x}^i$ annimmt.

Dann gilt der folgende Satz:

Satz 4. *Es seien $A(u, v; x^i)$, $B(u, v; x^i)$ fest gewählt und als Funktionen von u, v und x^i für alle u, v mit $v > 0$ und alle x^i aus einem gewissen Gebiet T stetig differenzierbar. $\overline{T}$ sei weiter ein beliebiges ganz in T enthaltenes Gebiet und $\overline{S}$ seine (glatte) Randkurve. Betrachtet werden die Integralrelationen* (III 7), *angeschrieben für alle möglichen in $\overline{T} + \overline{S}$ stetig differenzierbaren Lösungen $u(x^i), v(x^i)$ von* (II 13) *mit $v > 0$. Ist dann jede Integralrelation aus der so erklärten Gesamtheit frei von Ableitungen der gesuchten Funktionen u und v, so müssen A und B für alle u, v mit $v > 0$ und alle $x^i \in T$ den Cauchy-Riemannschen Gln.* (III 8) *genügen.*

Der Beweis läßt sich folgendermaßen führen: Wir nehmen an, für einen Punkt $\mathring{u}, \mathring{v}, \mathring{x}^i$ des vierdimensionalen Gebietes

$$v > 0, \qquad x^i \in T$$

sei

$$A_u - B_v = C_1, \qquad A_v + B_u = C_2 \tag{III 10}$$

und die zwei Konstanten C_1 und C_2 verschwinden nicht beide:

$$C_1^2 + C_2^2 > 0. \tag{III 10'}$$

Wir werden zeigen, daß dann unter der Gesamtheit der zugelassenen Integralrelationen solche existieren, die nicht frei von Ableitungen der gesuchten Funktionen sind. Damit ist der Widerspruch geführt und die obige Aussage bewiesen.

Vorerst formen wir (III 7) unter Verwendung von (II 13) bzw.

$$\nabla_1 u = \nabla_2 v + F(u, v; x^i), \qquad \nabla_1 v = -\nabla_2 u + G(u, v; x^i)$$

um:

$$\begin{cases} \oint\limits_S B\varphi^1 + A\varphi^2 \\ = \iint\limits_{\overline{T}} \{(A_u - B_v)\nabla_2 v - (A_v + B_u)\nabla_2 u\}[\varphi^1 \varphi^2] + \\ \quad + \iint\limits_{\overline{T}} \{F A_u + G A_v + A_{x^i} \nabla_1 x^i - B_{x^i} \nabla_2 x^i - \not{p} A + \not{p} B\}[\varphi^1 \varphi^2]. \end{cases} \tag{III 11}$$

Da in dem zweiten Doppelintegral nur u, v und x^i auftreten, brauchen wir lediglich das erste zu untersuchen. Der Integrand lautet

$$I[\omega^1 \omega^2] \equiv k^2 \frac{1}{v} \{(A_u - B_v)\nabla_2 v - (A_v + B_u)\nabla_2 u\}[\omega^1 \omega^2]. \tag{III 12}$$

Für $x^i = \mathring{x}^i$, $u = \mathring{u}$, $v = \mathring{v}$ wird

$$\mathring{I} = k^2(\mathring{x}^i)\,\frac{1}{\mathring{v}}\,\{C_1 V_2 v - C_2 V_2 u\}. \tag{III 13}$$

Können wir eine Lösung $u(x^i)$, $v(x^i)$ von (II 13) finden, die in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{U}$ von $x^i = \mathring{x}^i$ stetig differenzierbar ist, für $x^i = \mathring{x}^i$ die Werte $\mathring{u}$, annimmt und für welche $V_2 u$ und $V_2 v$ willkürlich vorschreibbare Werte und μ in diesem Punkt besitzen, so sind wir fertig. Wir bilden nämlich für einen ganz in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Bereich $\overline{T} + \overline{S}$ mit den so gewonnenen Lösungen $u(x^i)$, $v(x^i)$ die Integralrelation (III 11). Der Integrand lautet dann im Punkte $\mathring{x}^i$:

$$\mathring{I} = k^2(\mathring{x}^i)\,\frac{1}{\mathring{v}}\,\{C_1 \mu - C_2 \lambda\} \tag{III 14}$$

und variiert mit λ und μ.

Die Existenz von Lösungen u, v der Differentialgleichungen (II 13) mit den verlangten Eigenschaften folgt unschwer aus dem allgemeinen Existenzsatz von Cauchy-Kowalewski für partielle Differentialgleichungen (vgl. GOURSAT [2], S. 9). Die Gln. (II 13) können wir unter Verwendung der Pfaffschen Ableitungen bezüglich der (nur von x^1, x^2 abhängigen) Formen ω^1 und ω^2 auch

$$\begin{cases} u_1 - u\,u_2 - v\,v_2 = k\,F(u, v;\, x^i) \\ v_1 - u\,v_2 + v\,u_2 = k\,G(u, v;\, x^i) \end{cases} \tag{III 15}$$

schreiben. Nun seien $\alpha(x^i)$ und $\beta(x^i)$ integrierende Faktoren der Formen ω^1 und ω^2. Dann existieren zwei Funktionen $\xi(x^i)$, $\eta(x^i)$ mit

$$d\xi = \alpha\,\omega^1, \qquad d\eta = \beta\,\omega^2. \tag{III 16}$$

$\xi(x^i)$ und $\eta(x^i)$ sind unabhängige Funktionen:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x^1, x^2)} \neq 0 \tag{III 17}$$

und lassen sich als unabhängige Variable in (III 15) an Stelle von x^1, x^2 einführen. Da aus (III 16) noch

$$h_1 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial \xi}, \qquad h_2 = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial h}{\partial \eta} \tag{III 18}$$

für jede stetig differenzierbare Funktion h folgt, erhalten wir für (III 15):

$$\begin{cases} u_\xi = \dfrac{\alpha}{\beta}\,(u\,u_\eta + v\,v_\eta) + k\,\alpha\,F\big(u, v;\, x^i(\xi, \eta)\big) \\ v_\xi = \dfrac{\alpha}{\beta}\,(-v\,u_\eta + u\,v_\eta) + k\,\alpha\,G\big(u, v;\, x^i(\xi, \eta)\big). \end{cases} \tag{III 19}$$

In diesen Gleichungen sind ξ, η die unabhängigen Veränderlichen. Nach unseren Voraussetzungen sind die Koeffizienten der Formen ω^1 und ω^2 analytische Funktionen von x^1, x^2. Daraus und aus (II 12) folgt unmittelbar die Analytizität der rechten Seiten von (III 19) in den vier Argumenten

u, v, ξ, η. Nach dem Satz von Cauchy-Kowalewski existiert demnach eine in einer Umgebung $\mathfrak{U}$: $(\xi-\mathring{\xi})^2+(\eta-\mathring{\eta})^2\leq\delta^2$ des Punktes

$$\mathring{\xi}=\xi(\mathring{x}^i), \qquad \mathring{\eta}=\eta(\mathring{x}^i)$$

analytische Lösung $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$, die auf der Kurve

$$\xi=\mathring{\xi}$$

vorgegebene reguläre Werte $u=u(\eta)$, $v=v(\eta)$ besitzt. Die Funktionen $u(\eta)$, $v(\eta)$ seien so gewählt, daß sie für $\eta=\mathring{\eta}$ die Werte $\mathring{u}$, $\mathring{v}$ annehmen. Die Kurve $\xi=\mathring{\xi}$ ist in der x^1, x^2-Ebene die durch den Punkt $\mathring{x}^i$ gehende Integralkurve der Differentialgleichung $\omega^1=0$. Da die Funktionen $u(\eta)$, $v(\eta)$ willkürlich sind, lassen sich insonderheit $u'(\eta=\mathring{\eta})$, $v'(\eta=\mathring{\eta})$ und damit auch

$$\nabla_2 u/\mathring{x}^i=\frac{1}{k(\mathring{x}^i)}-\frac{1}{\beta(\mathring{x}^i)}\,\mathring{v}\cdot u'(\mathring{\eta})$$

$$\nabla_2 v/\mathring{x}^i=\frac{1}{k(\mathring{x}^i)}-\frac{1}{\beta(\mathring{x}^i)}\,\mathring{v}\cdot v'(\mathring{\eta})$$

beliebig wählen. Das war zum Beweis des Satzes noch zu zeigen.

IV. Untersuchung der Randbedingungen.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Forderung (B) zu. Dazu müssen wir die bei den nach (A) zugelassenen Integralrelationen auftretenden Randintegrale betrachten. Nach Satz 4 haben diese die Gestalt

(IV 1) $$\oint\vartheta \quad \text{mit} \quad \vartheta=B\varphi^1+A\varphi^2,$$

wobei A, B bezüglich u, v konjugierte Potentialfunktionen sind. Zunächst empfiehlt es sich, von A, B zu einem neuen Paar konjugierter Potentialfunktionen $\overline{A}, \overline{B}$ durch die auf dem Rande S eines einfach zusammenhängenden Gebietes T umkehrbar eindeutige Transformation

(IV 2) $$\begin{cases} A=(u\cos\gamma+\sin\gamma)\,\overline{A}-v\cos\gamma\,\overline{B} \\ B=v\cos\gamma\,\overline{A}+(u\cos\gamma+\sin\gamma)\,\overline{B} \end{cases}$$

überzugehen. Dabei soll γ den Winkel der Tangentenrichtung von S mit der Richtung $\omega^2=0$ angeben. γ bestimmt sich also aus

(IV 3) $$\omega^1=\cos\gamma\,ds, \qquad \omega^2=\sin\gamma\,ds \quad \text{auf } S.$$

Mit den Werten für φ^1, φ^2 (II 11) sowie für ω^1, ω^2 (IV 3) ergibt sich

(IV 4) $$\vartheta=k\left\{\frac{u^2+v^2}{v}\cos^2\gamma+2\frac{u}{v}\sin\gamma\cos\gamma+\frac{1}{v}\sin^2\gamma\right\}\overline{A}\,ds.$$

Bei Einführen von $r, \bar{r}, n$ nach (II 7) können wir für den in geschweiften Klammern stehenden Ausdruck auch

$$r\cos^2\gamma + 2n\sin\gamma\cos\gamma + \bar{r}\sin^2\gamma$$

schreiben und erkennen daraus, daß er mit der Normalkrümmung b des von dem gesuchten Flächenstück bestimmten Randstreifens übereinstimmt [vgl. (I 7) und (IV 3)]. Damit haben wir

$$\vartheta = b\cdot\overline{A}(u, v; s)\,ds$$

bzw. mit der Bezeichnung $\vartheta = M\,ds$ der Einleitung:

$$M = b\overline{A}(u, v; s). \tag{IV 5}$$

Mit der Transformation (IV 2) ist erreicht, daß bei M nur noch eine willkürliche Funktion $\overline{A}$ auftritt, die nur an die Potentialgleichung gebunden ist:

$$\overline{A}_{uu} + \overline{A}_{vv} = 0. \tag{IV 6}$$

Das Auftreten der Funktionen u, v in den Argumenten von $\overline{A}$ ist störend, da sie keine unmittelbare geometrische Bedeutung besitzen. Wir werden versuchen, sie durch die geodätische Windung a und die Normalkrümmung b des Randstreifens zu ersetzen. Mit den Koeffizienten $r, \bar{r}, n$ der zweiten Grundform wird

$$a = -r\sin\gamma\cos\gamma + n(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) + \bar{r}\sin\gamma\cos\gamma,$$

und damit bestimmen sich a, b wegen (II 7) gemäß

$$\begin{cases} a = k\dfrac{1}{v}\{-(u^2+v^2)\sin\gamma\cos\gamma + u(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) + \sin\gamma\cos\gamma\} \\ b = k\dfrac{1}{v}\{(u^2+v^2)\cos^2\gamma + 2u\sin\gamma\cos\gamma + \sin^2\gamma\} \end{cases} \tag{IV 7}$$

als Funktionen von u, v. Daraus folgt, daß

$$U = \frac{k}{b}, \qquad V = \frac{a}{b} \tag{IV 8}$$

als Funktionen von u, v konjugierte Potentialfunktionen sind und daß

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \neq 0 \tag{IV 9}$$

gilt, wie sich durch direkte Rechnung bestätigen läßt. Längs des Randes können wir also für u, v auch diese neuen Größen einführen. Setzen wir

$$\overline{A}(u, v; s) \equiv F(U, V; s), \tag{IV 10}$$

so genügt F wieder der Potentialgleichung

$$F_{UU} + F_{VV} = 0, \tag{IV 11}$$

falls (IV 6) besteht, und die letztere folgt auch aus der Gültigkeit von (IV 11). Jetzt ist

(IV 12) $$M = b \cdot F\left(\frac{k}{b}, \frac{a}{b}; s\right)$$

zu setzen.

Um nun alle der Forderung (B) genügenden Randbedingungen zu finden, gehen wir so vor: Gleichwertig mit

(B) $$\frac{\partial(M, \Pi)}{\partial(u, v)} = 0$$

ist die folgende Beziehung

(IV 13) $$M = \Phi(\Pi; s),$$

wobei $\Phi(t, s)$ eine willkürliche Funktion der zwei Argumente t und s ist. Indem wir nun die Randbedingung

$$\Pi(u, v; s) = \pi(s) \qquad [\text{vgl. (1)}]$$

und (IV 12) in (IV 13) einführen, erhalten wir endgültig die Randbedingung in der Gestalt

(IV 14) $$b \cdot F\left(\frac{k}{b}, \frac{a}{b}; s\right) = f(s) = \Phi(\pi(s); s).$$

Satz 5. *Vorgegeben sei für die Gauß-Codazzischen Gleichungen auf dem Rande eines einfach zusammenhängenden Gebietes der x^1, x^2-Ebene eine Randbedingung*

$$\Pi(u, v; s) = \pi(s).$$

Sollen Integralrelationen mit den Eigenschaften

A. sie sind frei von den Ableitungen der gesuchten Funktionen,

B. der Integrand des Randintegrales ist vermöge der Randbedingung eine bekannte Funktion der Bogenlänge

existieren, so besitzt die Randbedingung die Gestalt (IV 14). *Dabei sind a bzw. b geodätische Windung bzw. Normalkrümmung des Randes des gesuchten Flächenstückes. Die Funktion F genügt der Potentialgleichung.*

Mit diesem Satz haben wir das gewünschte Ergebnis. Wir erhalten also eine derartige Randbedingung, indem wir in (IV 14) für F eine Potentialfunktion wählen und k/b bzw. a/b für die Argumente U, V setzen. Der einfachste Fall einer Potentialfunktion ist eine lineare Funktion

$$F = \alpha + \gamma U + \beta V,$$

wobei α, β, γ beliebige Funktionen der Bogenlänge s sein dürfen. Führen wir a, b ein, so wird

$$F = \alpha + \gamma \frac{k}{b} + \beta \frac{a}{b}$$

und damit geht (IV 14) über in

(IV 15) $$\alpha(s)\, b + \beta(s)\, a + k\gamma(s) = f(s).$$

Satz 6. *Zur Klasse der zugelassenen Randbedingungen gehören speziell solche, bei denen zwischen Normalkrümmung und geodätischer Windung eine lineare Beziehung besteht.*

Literatur.

[1] BLASCHKE, W.: Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin 1950. — [2] GOURSAT, E.: Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig 1893. — [3] HARTMANN, P., and A. WINTNER: On the embedding problem in differential geometry. Amer. J. Math. **72**, 553—564 (1950). — [4] JANET, M.: Sur la possibilite de plonger une espace de riemann donne dans une espace euclidien. Ann. Soc. Pol. Math. **5**, 38—43 (1927). — [5] NITSCHE, JOACHIM: Bestimmung der Flächen, deren Bogenelement negativer Krümmung als Quadratsumme zweier Pfaffscher Formen gegeben ist. Arch. Math. **3**, 50—59 (1952). — [6] NITSCHE, JOACHIM: Beiträge zum Randwertproblem quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme. Math. Nachr. **7**, 35—54 (1952).

Berlin-Dahlem, Hüttenweg 11.

(Eingegangen am 17. April 1954.)

Inhalt und Maß

Von Dr. **Karl Mayrhofer**, o. Universitätsprofessor der Mathematik, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mit 17 Figuren. VIII, 269 Seiten Gr.-8°. 1952. (W) DM 36.—; Ganzleinen DM 39.—

Inhaltsübersicht: *Abstrakte Inhalte und Maße.* Hilfsmittel aus der Mengenlehre. — Additive Inhalte. — Volladditive Inhalte und Maße. — Maßgleiche Hüllen und Kerne. — Vollständige Inhalte und Maße. — Vervollständigung eines Inhaltes und eines Maßes. — Erweiterung eines volladditiven Inhaltes zu einem Maße. — Kriterien für die j-Meßbarkeit. — Inhalt und Maß in Produkträumen. — *Der* Jordansche *Inhalt.* Der elementare Inhalt der Würfelaggregate. — Der n-dimensionale Jordansche Inhalt. — Überdeckende Zellensysteme. — Inhalt spezieller Gebilde. — *Das* Borelsche *und das* Lebesguesche *Maß.* Das Borelsche Maß. — Das Lebesguesche Maß. — Nicht nach Lebesgue meßbare Mengen. — Der Überdeckungssatz von Vitali. — Dichte einer Punktmenge. — *Transformation von Inhalt und Maß.* Lineare Transformationen. — Transformation von Inhalt und Maß. — Inhalt und Maß elementarer Gebilde. — *Theorie der äußeren Maße.* Äußere und innere Maße. — Die Außenfunktion der ko-Erweiterung eines volladditiven Inhalts als äußeres Maß. — *Verbände und Somenfunktionen.* Boolesche Verbände. — Isomorphieen und Homomorphieen. — Somenfunktionen. — *Anhang.* Borelsche Mengen.

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von Dr. phil. **Adalbert Duschek**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien. (W)

Erster Band: **Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten Gr.-8°. 1949. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

Zweiter Band: **Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder.** Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten Gr.-8°. 1950. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

Dritter Band: **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.** Mit 107 Textabbildungen. IX, 512 Seiten Gr.-8°. DM 36.50; Ganzleinen DM 38.80

Vierter Band: **Randwertprobleme. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplacetransformation.** In Vorbereitung.

Aus den Besprechungen: ... Die Darstellung zeigt große Klarheit und Exaktheit. Das Buch ist vor allem für Ingenieure und Physiker bestimmt und deshalb ist besonders die Reichhaltigkeit der Beispiele und Aufgaben zu begrüßen, deren Lösungen am Schluß des Buches im Anhang II zusammengestellt sind. Sie tragen wesentlich zur nutzvollen Verarbeitung des in diesem Band reichlich gebotenen Stoffes bei. Den Anhang I bildet eine Tabelle der Gaussschen Transzendenten. Das Buch wird jedem Ingenieur und Physiker, der ein weiteres Eingehen in mathematische Begriffe und Methoden wünscht, von größtem Nutzen und Genuß sein ... *„Elektrotechnische Zeitschrift"*

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXVIII. Band: **Reelle Funktionen**

Von **Georg Aumann**, o. Professor an der Universität München. Mit 22 Abbildungen. VIII, 416 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 56.—; Ganzleinen DM 59.60

Inhaltsverzeichnis: Vorbemerkung, Überblick und Zeichenerklärung. — **Mengen:** Mengen und Teilmengen. Verknüpfungen von Mengen. Mengensysteme. Produktmenge, Abbildung. Abzählbare Mengen. Die Mächtigkeit des Kontinuums. — **Ordnungen:** Teilweise geordnete Mengen. Vollständigkeit t-geordneter Mengen. Komposition t-geordneter Mengen. k-geordnete Mengen. Wohlgeordnete Mengen. Mengenvergleichung. Ordinalzahlen. Kardinalzahlen. BORELsche und SUSLINsche Mengensysteme. Allgemeine Konvergenztheorie. — **Verbände:** Der Verband. Distributive und komplementäre Verbände. Somenringe. Unteilbare Elemente. Isomorphiesatz. σ-Somenringe. — **Räume:** Der metrische Raum. Offene Mengen. Abgeschlossene Mengen. Randmengen. Dichte Mengen. Umgebungssysteme. Kompaktheit. Mengenkonvergenz. Vollständige Räume. Die BORELschen und SUSLINschen Mengen eines topologischen Raumes. — **Reelle Punktfunktionen:** Funktionen auf abstrakten Mengen. Stetige Funktionen in topologischen Räumen. Nichtkonstante stetige Funktionen (Metrisation). Halbstetige Funktionen. Unstetige Funktionen. Die BAIREschen Funktionen. Approximation stetiger Funktionen. Abbildungen und Gleichungen. Der allgemeine Zwischenwertsatz. — **Funktionen in Produkträumen:** Metrische Produkträume. Faktoriell stetige Funktionen. Faktoriell stetige Erweiterungen. — **Reelle Funktionen einer reellen Variablen:** Ableitungen und Derivierte. Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung. Umkehrung der Differentiation. Das T-Integral und seine Erweiterungen. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. Vergleich der Funktionenbereiche. — **Maßtheorie:** Vorbetrachtung zur Maßtheorie. Additive Somenfunktionen. Intervallfunktionen. Die Methode der additiven Zerleger. Differenzdarstellung der additiven Funktionen. Totalisation. Konstruktion von Maßfunktionen. Vervollständigung eines Inhalts durch Einschließung. Maße und ihre Vervollständigung. Reduzierte Inhalte und Maße. Erweiterung eines Inhalts zu einem Maß. LEBESGUEsches Maß im E^q. — **Positive lineare Funktionale.** Elementarintegral und Normintegral. Die N-integrierbaren Funktionen. Die N-meßbaren Funktionen. Beziehungen zur Maßtheorie. Die Funktionenräume $\mathfrak{F}^p$, $\mathfrak{L}^p$. Der Raum $\mathfrak{L}^2$. Vergleich von Elementarintegralen. Iterierte Integrale. Literatur. Namen- und Sachverzeichnis. Zeichenverzeichnis.

LXX. Band:

Die Grundlagen der Quantenmechanik

Von Dr. rer. nat. **Günther Ludwig**, o. Professor an der Freien Universität Berlin. Mit 52 Abbildungen. XII, 460 Seiten Gr.-8°. 1954.

DM 49.—; Ganzleinen DM 52.60

Inhaltsübersicht: Induktives Auffinden quantentheoretischer Gesetze. — Deduktiver Aufbau der Quantentheorie. — Transformationstheorie. — Bewegungsgleichungen. — Der Meßprozeß. — Quantentheorie und physikalisches Weltbild. — Einelektronenspektren. — Zweielektronenspektren. — Auswahlregeln und Intensität der Spektrallinien. — Vielelektronenspektren. — Stoßprozesse. — Molekülspektren und chemische Bindung. — Anhang I: Grundzüge des HILBERT-Raumes. — Anhang II: Darstellungstheorie. — Anhang III: Transformationen der Teilräume des HILBERT-Raumes. — Anhang IV: Hilfssatz. — Sachverzeichnis. Zeichenzusammenstellung.

Aus dem Vorwort: Nachdem das Buch von J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, vergriffen war, fehlte ein entsprechendes Werk, das im physikalischen Zusammenhang die mathematischen Grundlagen klarlegte. In dem vorliegenden Buche ist die eigentliche Quantenmechanik (also ohne Feldtheorien) in der Weise dargestellt, daß man sie als ein mathematisch wohlbegründetes und in sich genau so widerspruchsfreies und abgeschlossenes System erkennt, wie die klassische Punktmechanik.
Neben dem Wunsch, die Quantenmechanik als ein in sich geschlossenes Gebiet darzustellen, bestand ein zweiter Grund für die Abfassung des Buches in der inneren Harmonie zwischen mathematischer und physikalischer Struktur. Je größer die abstrakte Schönheit einer Theorie, desto größer auch ihr Wahrheitsgehalt. Die innere Harmonie in der Struktur der Materie zu erkennen, d. h. für uns Menschen im Gewande mathematischer Schönheit zu erfassen, ist wohl die Hauptantriebskraft, sich mit so viel Mühe auf diesen schweren Weg der Erkenntnis zu begeben. So will der Verfasser in diesem Buche Berichterstatter über das Erlebnis eines Kunstwerkes sein.

Die mathematischen Voraussetzungen zur Lektüre des Buches umfassen die für die klassische Physik notwendigen Gebiete, auch die übliche elementare Matrizenrechnung. Hergeleitet wird die Theorie des HILBERT-Raumes, der Gruppen- und ihrer Darstellungen, wie die Theorie des Maßes und LEBESGUEschen Integrales, soweit diese benutzt werden. An physikalischen Voraussetzungen sind die klassische Mechanik, die Grundlagen der Thermodynamik und Elektrodynamik erforderlich. Eine vorhergehende Kenntnis der grundlegenden experimentellen Ergebnisse der Atomphysik würde das Durcharbeiten des Buches vereinfachen, da es sonst notwendig wäre, in grundlegenden Lehrbüchern während des Lesens nachzuschlagen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.